

Geometria analitica della retta

(sui luoghi geometrici di un triangolo: ortocentro, baricentro)

Problema_1

Del triangolo ABC sono noti i vertici A(-2;1), B(2;0) e l'ortocentro H(0;2).

Q1- Determinare le coordinate del terzo vertice C

Q2- Determinare le coordinate del baricentro G.

Q3- Calcolare l'area S_1 del triangolo ABC e quella S_2 del triangolo ABG e verificare che $S_1=3S_2$.

Soluzione

Q1- Discussione del problema e strategia risolutiva.

Ricordiamo che l'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle rette delle tre altezze dello stesso. Ciò premesso, si riconosce che il lato AC è la retta passante per il vertice A e perpendicolare alla retta dell'altezza passante per il vertice B; dunque, la retta [A;C] è perpendicolare alla retta [B;H]. Analogamente, la retta del lato BC è perpendicolare alla retta dell'altezza passante per il vertice A; dunque, la retta [B;C] è perpendicolare alla retta [A;H].

Per determinare le coordinate del terzo vertice C determineremo preliminarmente i coefficienti angolari delle rette delle altezze [B;H], [A;H], quindi, sfruttando la condizione di perpendicolarità tra rette nel piano, scriveremo le equazioni delle rette dei lati [A;C], [B;C] e risolvendo il sistema tra le equazioni di queste ultime due rette troveremo le coordinate del vertice C.

Elaborazioni.

$$\text{Coefficiente angolare di [B;H]} \rightarrow m_1 = \frac{y_H - y_B}{x_H - x_B} = \frac{2}{-2} = -1$$

Equazione della retta del lato AC

$$[A;C]: y - y_A = -\frac{1}{m_1}(x - x_A) \rightarrow y - 1 = x + 2 \rightarrow r_1: y = x + 3$$

$$\text{Coefficiente angolare di [A;H]} \rightarrow m_2 = \frac{y_H - y_A}{x_H - x_A} = \frac{1}{2}$$

Equazione della retta del lato BC

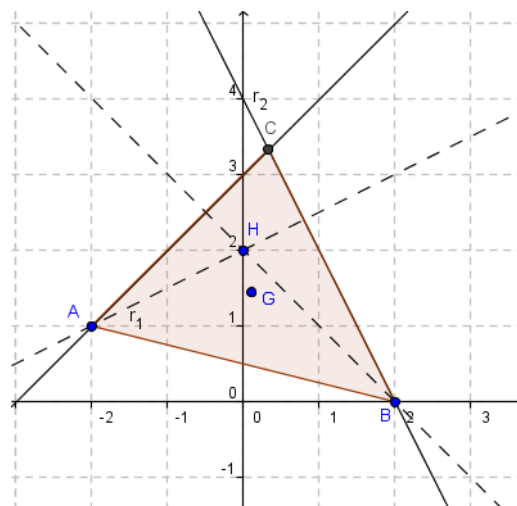
$$[B;C]: y - y_B = -\frac{1}{m_2}(x - x_B) \rightarrow y - 0 = -2(x - 2) \rightarrow$$

$$r_2: y = -2x + 4$$

Coordinate del punto C

$$C \equiv r_1 \cap r_2: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

Q2- Le coordinate del **baricentro G** di un triangolo ABC, punto di intersezione delle mediane dello stesso, quando sono note le coordinate dei tre vertici del triangolo si ricavano dalle relazioni



$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2 + 2 + \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 + 0 + \frac{10}{3}}{3} = \frac{13}{9}$$

Q3- Calcolo delle aree dei triangoli ABC, ABG

Per il calcolo delle aree dei due triangoli in questione utilizzeremo la formula del determinante del terzo ordine.

Per il triangolo ABC risulta

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{35}{6}$$

Per il triangolo ABG si ha

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{13}{9} & 1 \end{vmatrix} = \frac{35}{18}$$

Come si vede è soddisfatta la relazione $S_2 = \frac{1}{3} S_1$.

