Geometria analitica della retta

Problema

Considerati nel riferimento cartesiano ortogonale xOy i punti A(1;-2), B(4;0) risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Scrivere l'equazione dell'asse s del segmento AB e determinare le coordinate del punto C in cui la retta s interseca l'asse delle ordinate. Rappresentare nel riferimento cartesiano tutti gli elementi geometrici in argomento.

Q2- Determinare perimetro ed area del triangolo ABC.

Q3- Dimostrare che esiste un solo punto D sull'asse delle ascisse che individua con A e B un triangolo equiesteso al triangolo ABC. Determinare le coordinate di D. Realizzare una figura geometrica contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Soluzione

Q1- Ricordiamo che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio, ma coincide anche con il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento. Sfruttiamo questa proprietà del luogo per determinare l'equazione dell'asse. Precisamente, detto P(x;y) il generico punto dell'asse s, dovendo risultare $\overline{PA}=\overline{PB}$, sarà anche $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$. Ebbene, imponiamo che i quadrati delle distanze del punto P dagli estremi del segmento siano uguali, esprimendo la relazione tramite le coordinate cartesiane e sviluppiamola; una volta semplificata si otterrà l'equazione dell'asse del segmento AB.

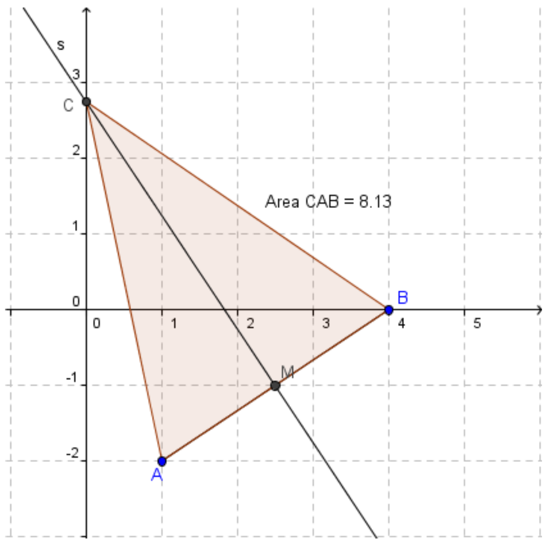

Figura 1

$$\overline{PA}^2=(x-1)^2+(y+2)^2;$$

$$\overline{PB}^2=(x-4)^2+y^2;$$

$$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \to (x-1)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+y^2 \to$$

$$s: 6x+4y-11=0$$

Coordinate del punto C

Per ottenere le coordinate del punto C, intersezione della retta s con l'asse delle ordinate è sufficiente porre x=0 nell'equazione di s e determinare il valore dell'ordinata del punto.

$x=0 \to y=\dfrac{11}{4}$, Dunque risulta $C\left(0;\dfrac{11}{4}\right)$.

Q2- Calcolo del Perimetro del triangolo

Osserviamo che il triangolo ABC è isoscele su AB perché C è equidistante dagli estremi del segmento AB.

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{13}$; $\overline{AC}=\sqrt{(1-0)^2+\left(-2-\dfrac{11}{4}\right)^2}==\dfrac{\sqrt{377}}{4}$

$$Per(ABC)=\overline{AB}+2\overline{AC}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{377}}{2}$$

Calcolo dell'area del triangolo.

Assumendo come base del triangolo il lato AB, l'altezza relativa è il segmento che congiunge C con il punto M medio di AB (perché il triangolo è isoscele su AB, come già precisato).

Osservato che $M\left(\frac{5}{2};-1\right)$ e che

$$\overline{CM}=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{4}+1\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{225}{16}}=\frac{5}{4}\sqrt{13}$$

il valore dell'area del triangolo ABC è

$$Area(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CM}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{13}=\frac{65}{8}$$

Nella **Figura 1** che abbiamo riportato è indicato il valore dell'area del triangolo arrotondato al centesimo.

Q3- Facciamo notare che i triangoli aventi come uno dei loro lati il segmento AB e che hanno la stessa area del triangolo ABC devono avere rispetto alla base AB altezze della stessa misura; dunque, la distanza del punto D dalla retta che contiene A e B deve essere uguale alla distanza del punto C da AB (nel nostro caso la misura del segmento CM). Queste considerazioni indicano che il punto D deve trovarsi sulla retta che passa per C e che risulta parallela al segmento AB. Ebbene, se scriviamo l'equazione della retta per C parallela ad AB, che è incidente l'asse delle ascisse, risolvendo il sistema tra l'equazione di tale retta e quella dell'asse *x* si determinano le coordinate del punto D, che è unico perché unico è il punto comune tra due rette incidenti distinte.

Coefficiente angolare della retta [A;M]

$$m=\frac{0-(-2)}{4-1}=\frac{2}{3}$$

Equazione della retta r//[A;M].

Scriviamo l'equazione utilizzando il modello che permette di ricavare l'equazione di una retta quando sono note le coordinate di un punto da cui passa (nel nostro caso il punto C) ed il valore del coefficiente angolare.

$$r: y-y_C=m(x-x_C)\rightarrow r: y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{4}$$

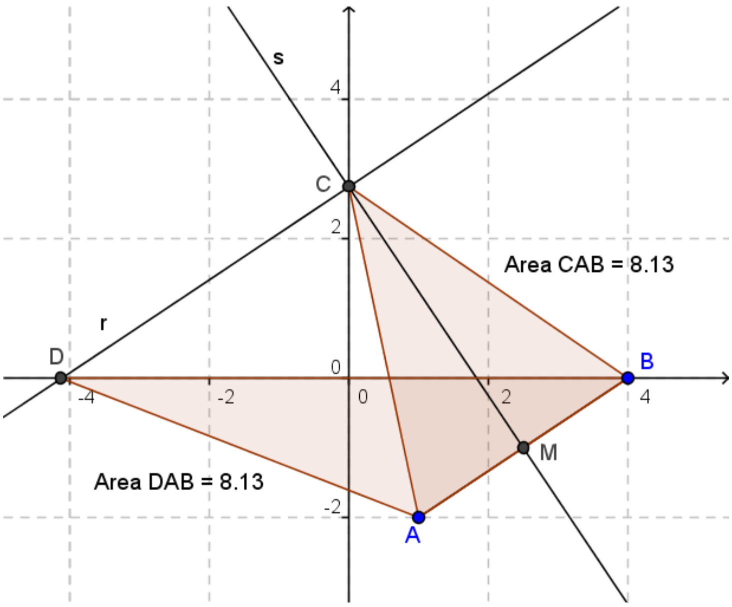

Figura 2

L'ascissa del punto D si ottiene ponendo y=0 nell'equazione della retta r. Risulta $x_D=-\frac{33}{8}\rightarrow$ $D\left(-\frac{33}{8};0\right)$.

La **Figura 2** riportata contiene tutti gli elementi geometrici assegnati e quelli determinati con le elaborazioni sviluppate.