Luoghi geometrici nel piano cartesiano

Asse di un segmento, punti notevoli di un triangolo

Es2- Nel piano cartesiano sono dati i punti $A(-2;-1)$, $B(2;2)$, $C(5;-2)$.

Quesiti

1) Verificare che il triangolo è isoscele.
2) Determinare le coordinate del circocentro D.
3) Trovare le coordinate del baricentro G.
4) Determinare le coordinate del punto medio M di AC e riconoscere che coincide con D. Verificare che BD≅3GD.

Soluzione

Premessa

1) Per la misura della distanza assoluta tra i due punti A, B utilizziamo il simbolo $\overline{AB}$. Ricordiamo che note le coordinate dei due punti $A(x_A;x_B)$, $B(x_B;x_B)$, la distanza è

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

2) Il punto medio M tra i due punti $A(x_A;x_B)$, $B(x_B;x_B)$ ha coordinate

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

*** ***

1) Il triangolo è isoscele se ha due lati congruenti. Determiniamo le misure dei lati AB, AC, BC.

$$\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ \overline{AC}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2};\ \overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Poiché $\overline{AB}=\overline{BC}$ **il triangolo è isoscele sulla base AC**.

2) **Il circocentro del triangolo è il punto equidistante dai tre vertici**. Indicando D(x;y) il circocentro deve risultare $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$ e quindi anche $\overline{AD}^2=\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$. Poiché

$$\overline{AD}^2=(x+2)^2+(y+1)^2,\ \overline{BD}^2=(x-2)^2+(y-2)^2,\ \overline{CD}^2=(x-5)^2+(y+2)^2,$$

deve sussistere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \\ \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2 \end{cases}, \text{ che semplificato diventa}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3 \\ 7x - y = 12 \end{cases}, \text{ la cui soluzione è } \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3/2 \end{cases}.$$

Il circocentro del triangolo è il punto $D\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

3) Il baricentro del triangolo G ha coordinate

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2+2+5}{3} = \frac{5}{3};\quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1+2-2}{3} = -\frac{1}{3}.\quad G\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

4) **Il punto medio M** di AC ha coordinate

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2};\quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

Come si vede M ha le stesse coordinate di D; i due punti coincidono.

Verifica della congruenza: BD≅3GD.

Una volta riconosciuto che D coincide con il punto medio del lato AC, quindi che BD è mediana del triangolo ABC, tenendo presente che G è il baricentro dello stesso triangolo, si può ricordare la proprietà di cui gode G:"*il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra*". Dunque è noto che BG≅2GD, quindi GD è la terza parte di BD.

Verifichiamo comunque la proprietà tramite le misure dei segmenti BD e GD.

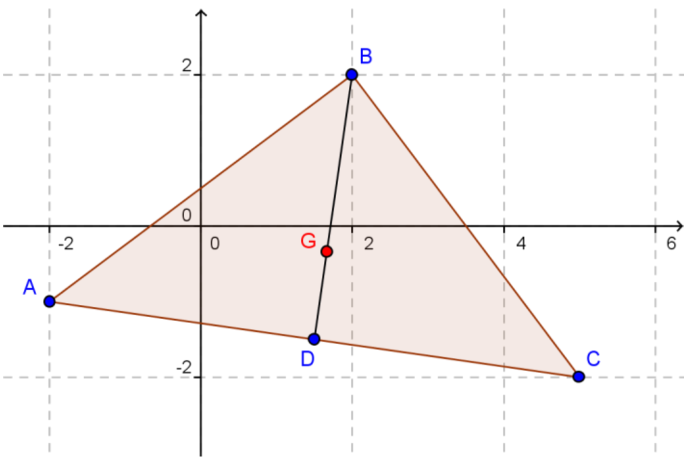
$$\overline{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2};$$

$$\overline{GD} = \sqrt{(x_D - x_G)^2 + (y_D - y_G)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{49}{36}} = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$



Ebbene risulta $\overline{BD} = \frac{5}{2}\sqrt{2} = 3 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{2} = 3\overline{GD}$. C.V.D.

Osservazione

Il triangolo ABC oltre ad essere isoscele su AC **è anche rettangolo in B**. Infatti le misure dei suoi lati verificano la relazione pitagorica

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, cioè $5^2+5^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$.