

Geometria analitica della retta

(Un parallelogramma quadrato)

Problema_1

Un parallelogramma ha un vertice nel punto $A(5;4)$ e due lati consecutivi sono sulle rette r, s di equazioni $r: x+2y-3=0$, $s: y=2x+4$. Determinare i vertici del parallelogramma e dimostrare che si tratta di un quadrato.

Soluzione

Strategia risolutiva

1. Osserviamo subito che il punto A non appartiene ad alcuna delle rette r, s : l'affermazione si giustifica verificando che le coordinate di A non verificano alcuna delle due equazioni.
2. I coefficienti angolari delle due rette r, s sono tra loro antireciproci: $m(s) = 2$,
$$m(r) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m(s)} \rightarrow r \perp s$$
; pertanto il parallelogramma sarà un rettangolo perché uno dei suoi angoli è retto e quindi, per le note proprietà, lo sono anche gli altri..
3. I vertici B, C, D del rettangolo si determinano osservando che C , vertice opposto ad A , è il punto comune alle rette r, s ; i vertici B e D si determinano scrivendo l'equazione della retta s' per A e parallela ad s e mettendola a sistema con l'equazione della retta r ; il punto D si può trovare in modo analogo, scrivendo l'equazione della retta r' per A e parallela ad r ed intersecandola con la retta s . Al fine di offrire al lettore un diverso modo per determinare le coordinate del punto D troveremo questo punto applicando la simmetria centrale di centro il punto medio M della diagonale AC . Infatti, D è il simmetrico di B rispetto ad M .
4. Per provare che il rettangolo $ABCD$ è un quadrato basterà far vedere che le misure di due lati consecutivi sono uguali, per esempio che $\overline{AB} = \overline{BC}$, oppure, più semplicemente, che il vertice A è equidistante dalle due rette r, s .

Elaborazioni

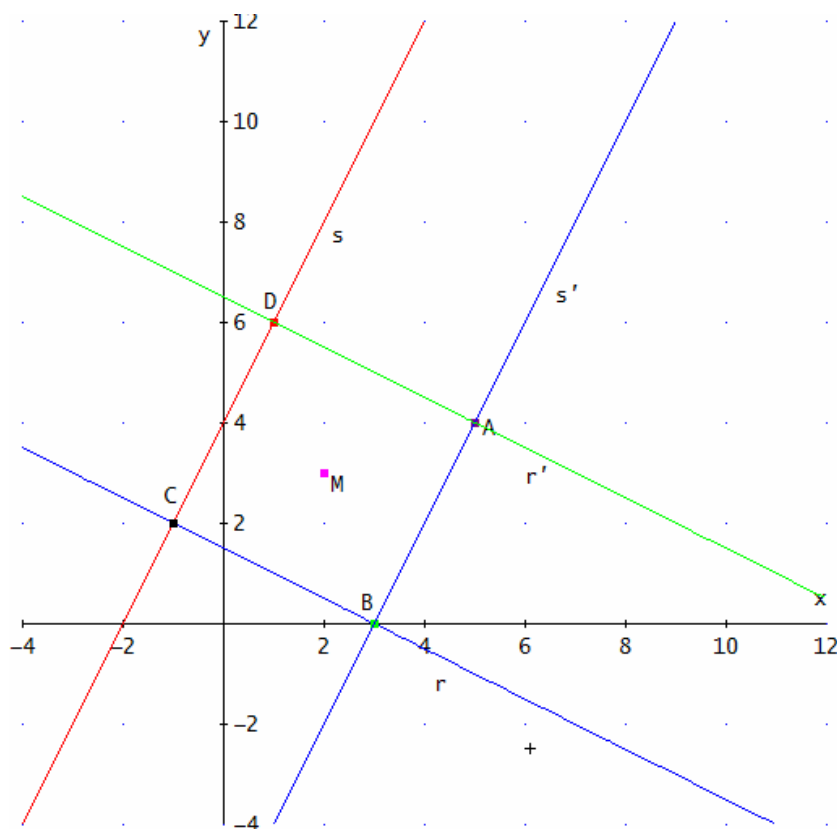
- ✚ Il punto A non appartiene ad alcuna delle due rette r, s . Infatti:
 $A(5;4); r: x+2y-3=0; 5+2 \cdot 4-3=10 \neq 0 \Rightarrow A \notin r$.
 $s: y=2x+4; 4 \neq 2 \cdot 5+4=14 \Rightarrow A \notin s$.
- ✚ Determiniamo le coordinate del vertice C risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette r, s .
$$\begin{cases} r: x+2y-3=0 \\ s: y=2x+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2(2x+4)-3=0 \\ y=2x+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+5=0 \\ y=2x+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow C(-1;2)$$
- ✚ Cerchiamo le coordinate di B . Scriviamo l'equazione della retta s' sopradetta.
 $s: y=2x+4; m(s)=2; s' \parallel s \rightarrow s': y-y_A=m(s)(x-x_A) \rightarrow s': y=2x-6$.
 $\{B\} = r \cap s'; \begin{cases} r: x+2y-3=0 \\ s': y=2x-6 \end{cases} \rightarrow B(3;0)$.
- ✚ Coordinate del punto medio di AC ed applicazione della simmetria centrale di centro M .
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3; \rightarrow M(2;3)$$

Le equazioni della simmetria centrale σ_M che trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$ sono
$$\sigma_M: \begin{cases} x' = 2x_M - x \\ y' = 2y_M - y \end{cases}$$

pertanto le coordinate del vertice D del rettangolo, simmetrico di B rispetto ad M, sono

$$\begin{cases} x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 3 - 0 = 6 \end{cases}$$

Riportiamo nella figura seguente le rappresentazioni grafiche degli elementi geometrici trovati.



- ✚ Rimane da verificare che il rettangolo ABCD è un quadrato. A tale scopo, come già anticipato, applicando la formula per il calcolo della distanza di un punto da una retta, troviamo le misure delle distanze del punto A dalle rette r ed s.

$$d(A; r) = \frac{|x_A + 2y_A - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 2 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5};$$

$$d(A; s) = \frac{|2x_A - y_A + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|10 - 4 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Come si vede le distanze sono uguali, dunque il rettangolo ABCD è un quadrato.