

Geometria analitica

Problema¹

Verificare che il quadrilatero avente per vertici i punti A(1;0), B(6;0), C(9;4), D(4;4) è un rombo e condurre dal punto M(a;-6) le parallele alle diagonali del rombo in modo che esse staccino sulla retta BC un segmento congruente al semiperimetro del rombo. Calcolare l'ascissa del punto M.

Soluzione

Si verifica immediatamente che il quadrilatero è un rombo. Infatti, i suoi lati sono congruenti, la loro misura è 5, quindi il perimetro del rombo vale 20.

La retta BC è la retta che contiene il lato BC e la sua equazione è r: $4x-3y=24$. Si devono scrivere le equazioni delle rette t, t' condotte da M e che siano parallele alle diagonali del rombo.

Equazione della retta per M e parallela alla diagonale AC

$$t: y - y_M = m(AC)(x - x_M) \rightarrow$$

$$t: y + 6 = \frac{1}{2}(x - a) \rightarrow t: 2y + 12 = x - a$$

Equazione della retta per M e parallela alla diagonale BD

$$t': y - y_M = m(BD)(x - x_M) \rightarrow t': y + 6 = -2(x - a)$$

Intersezioni della retta r con le rette t, t'.

$$E = r \cap t: \begin{cases} r: 4x - 3y = 24 \\ t: 2y + 12 = x - a \end{cases} \rightarrow E\left(\frac{12 - 3a}{5}; -\frac{4a + 24}{5}\right);$$

$$F = r \cap t': \begin{cases} r: 4x - 3y = 24 \\ t': y + 6 = -2(x - a) \end{cases} \rightarrow F\left(\frac{3 + 3a}{5}; \frac{4a - 36}{5}\right)$$

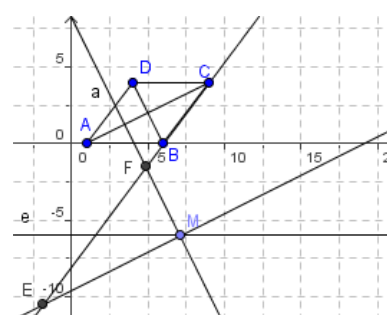


Figura 1- Figura di riferimento

Ora si trova la distanza tra i punti E, F e la si uguaglia al valore del semiperimetro; in questo modo si ottiene un'equazione nell'incognita a dalla quale si determinerà il valore del parametro e in definitiva avremo le coordinate del punto M.

$$\overline{EF} = \frac{1}{5} \sqrt{(6a - 9)^2 + (8a - 12)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{9(2a - 3)^2 + 16(2a - 3)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{25(2a - 3)^2} = |2a - 3|$$

$$\text{Relazione: } \overline{EF} = \text{semiperimetro}(ABCD) \Leftrightarrow |2a - 3| = 10$$

Risolvendo l'equazione si hanno due valori per il parametro:

$$2a - 3 = 10 \rightarrow a = \frac{13}{2} \rightarrow M\left(\frac{13}{2}; -6\right);$$

$$2a - 3 = -10 \rightarrow a = -\frac{7}{2} \rightarrow M\left(-\frac{7}{2}; -6\right)$$

Conclusione

Sulla retta di equazione $y = -6$ esistono due posizioni possibili per il punto M da cui tracciare le rette parallele alle diagonali del rombo che staccano sulla retta del lato BC un segmento di misura 10.

In Figura 2 sono riportati i due punti M₁, M₂ che rappresentano la soluzione del problema. Si osservi che le due rette condotte da M₁ ed M₂ parallele alle diagonali del rombo intersecano la retta BC negli stessi punti E, F.

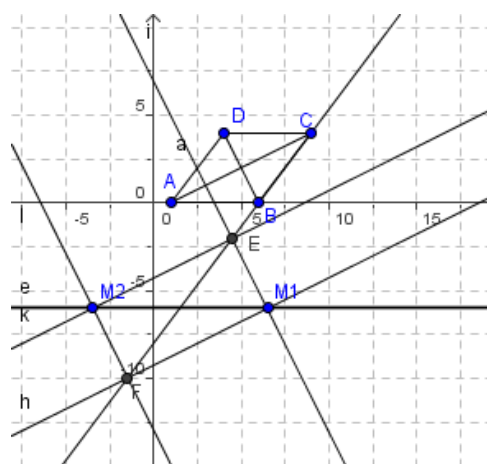


Figura 2- Figura finale quantitativa

¹ Quesito richiesto dall'utente della rete L. Antonio