

Geometria analitica della retta

(Luoghi geometrici; punto medio di un segmento; parallelogramma)

Q3. In un piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale xOy si consideri la retta $r: 4x-3y-2=0$ ed il punto $P(1;k)$, con k parametro reale.

- 3.1 Stabilire per quali valori di k il punto P si trova a distanza $d=2$ dalla retta r .
- 3.2 Riconosciuto nel precedente punto che esistono due valori di k che verificano la richiesta, siano P_1, P_2 i due corrispondenti punti. Scrivere l'equazione della retta P_1P_2 e determinare il punto M in cui essa taglia la retta r . Verificare che M è punto medio tra P_1 e P_2 .
- 3.3 Detto Q_1 il punto della retta r avente ascissa $x=-1$, determinare l'ulteriore punto Q_2 in modo che il quadrilatero $P_1Q_1P_2Q_2$ sia un parallelogramma. Determinare l'area del parallelogramma.
- 3.4 Realizzare la figura geometrica nel piano cartesiano completa di tutti gli elementi.

Elaborazioni

Soluzione

- 3.1 La distanza del punto $P_0(x_0; y_0)$ dalla retta $r: ax + by + c = 0$ è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Nel nostro caso si ha } d(P; r) = \frac{|4 - 3k - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 - 3k|}{5}$$

Il valore della distanza dipende dal parametro k . Per stabilire per quali valori del parametro k la distanza vale 2 (due) si deve risolvere l'equazione

$$\frac{|2 - 3k|}{5} = 2 \Leftrightarrow (2 - 3k = 10) \vee (2 - 3k = -10) \Leftrightarrow \left(k_1 = -\frac{8}{3}\right) \vee (k_2 = 4)$$

- 3.2 I due punti richiesti sono: $P_1\left(1; -\frac{8}{3}\right)$, $P_2(1; 4)$

Equazione della retta $[P_1; P_2]$

Poiché i due punti hanno la stessa ascissa l'equazione della retta da essi determinata è: $[P_1; P_2]: x = 1$.

Coordinate del punto M

Il punto M è l'intersezione della retta r con la retta $[P_1; P_2]$; per ottenerne le coordinate basta porre $x=1$ nell'equazione della retta r e trovare il valore dell'ordinata.

$$(r: 4x - 3y - 2 = 0; x = 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(1; \frac{2}{3}\right)$$

Verifica che M è punto medio tra P_1 e P_2 .

Ricordo che le coordinate del punto medio del segmento avente per estremi i punti P_1, P_2 sono

$$x = \frac{x_{P_1} + x_{P_2}}{2}; y = \frac{y_{P_1} + y_{P_2}}{2}$$

Sostituendo i valori delle coordinate dei due punti si ha

$$x = \frac{1+1}{2} = 1, y = \frac{-8/3+4}{2} = \frac{2}{3}$$

Come si vede, coincidono con le coordinate del punto M .

3.3 Coordinate del punto Q_1

L'ordinata del punto Q_1 si determina ponendo $x=-1$ nell'equazione della retta

r .

$$(r: 4x - 3y - 2 = 0; x = -1) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow Q_1(-1; -2)$$

Coordinate del punto Q_2 .

Il punto Q_2 deve essere tale che il quadrilatero $P_1Q_1P_2Q_2$ sia un parallelogramma. Notiamo che le diagonali del parallelogramma sono i segmenti P_1P_2 , Q_1Q_2 ; poiché le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente a metà, sapendo che M è il punto medio di P_1P_2 dovrà essere anche il punto medio della diagonale Q_1Q_2 , ciò implica che Q_2 è il simmetrico di Q_1 rispetto al punto M . Ciò premesso si possono determinare le coordinate del vertice Q_2 utilizzando la simmetria centrale di centro il punto M . Si ha:

$$\frac{x_{Q_1} + x_{Q_2}}{2} = x_M \Rightarrow x_{Q_2} = 2x_M - x_{Q_1} = 2 \cdot 1 - (-1) = 3$$

$$y_{Q_2} = 2y_M - y_{Q_1} = 2 \cdot \frac{2}{3} - (-2) = \frac{10}{3}$$

$$\text{Dunque } Q_2\left(3; \frac{10}{3}\right).$$

Area del parallelogramma

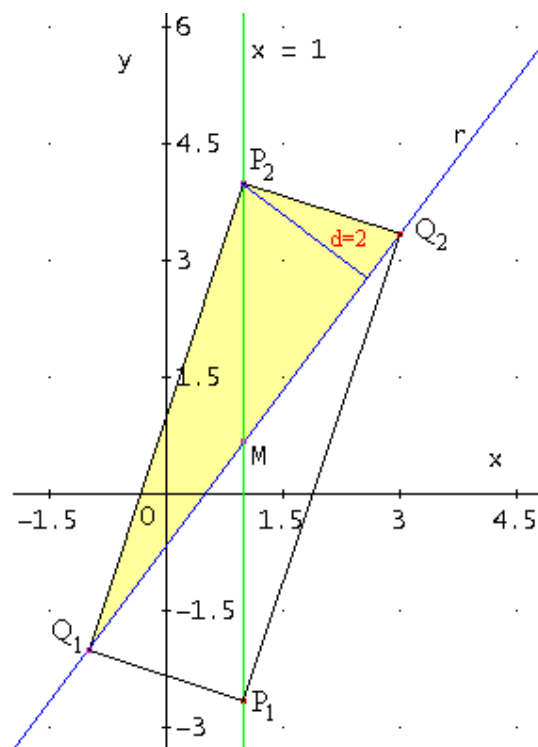
$P_1Q_1P_2Q_2$

Consideriamo il parallelogramma come composto dai due triangoli $Q_1P_1Q_2$, $Q_1P_2Q_2$. Notiamo che essi sono congruenti e che considerati sulla base comune Q_1Q_2 è noto il valore delle altezze relative; infatti, è la misura della distanza dei punti P_1 , P_2 dalla retta r e dal testo del problema è noto che vale 2. È sufficiente pertanto determinare la misura della diagonale Q_1Q_2 , dopo di che l'area del parallelogramma sarà

$$Area = \overline{Q_1Q_2} \cdot d$$

$$\overline{Q_1Q_2} = \sqrt{(3+1)^2 + \left(\frac{10}{3} + 2\right)^2} = \frac{20}{3}$$

$$Area = \overline{Q_1Q_2} \cdot d = \frac{20}{3} \cdot 2 = \frac{40}{3}$$



Valutazione: Le risposte devono essere adeguatamente giustificate con elaborazioni algebriche

10 punti per 3.1; **12** punti per 3.2; **28** punti per 3.3 (**2** punti per Q_1 , **10** punti per Q_2 , **16** per l'area del parallelogramma $P_1Q_1P_2Q_2$); **22** punti per la figura.

Punti
