Geometria analitica

Es_1)(m)

Si considerino in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane monometrico xOy i punti A(1;2), B(-3/2;-1), C(k-1;5-2k), con $k\in R$.

1.1 Stabilire per quali valori del parametro k il baricentro del triangolo ABC appartiene al primo quadrante.

1.2 Detto G il baricentro determinare per quale valore del parametro k il triangolo ABG è isoscele sulla base AB; per tale valore determinare le coordinate del vertice C ed il perimetro del triangolo ABC. Rappresentare il triangolo ABC ed il suo baricentro.

Soluzione

1.1 Note le coordinate dei vertici A, B, C si possono determinare le coordinate del baricentro G del triangolo ABC con le seguenti formule:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\ ,\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};$$

pertanto nel caso in esame si ha

$$x_G=\frac{1-\frac{3}{2}+k-1}{3}=\frac{2k-3}{6}\ ,\quad y_G=\frac{2-1+5-2k}{3}=\frac{6-2k}{3} \qquad (1.a)$$

Osserviamo che il baricentro ha coordinate variabili perché dipendono dal parametro k; occorre stabilire per quali valori del parametro il punto appartiene al primo quadrante. La condizione geometrica equivale a richiedere che le coordinate del punto siano non negative e dunque che il parametro k sia soluzione del seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2k-3}{6}\geq 0 \\ y_G=\dfrac{6-2k}{3}\geq 0 \end{cases}$$, il cui insieme di soluzioni è $S=\left[\frac{3}{2};3\right]$

1.2 Per determinare il valore richiesto del parametro k si devono trovare le misure delle distanze assolute dei segmenti AG, BG ed imporre che siano uguali; in tal modo si ottiene un'equazione nell'incognita k che risolta fornirà il valore richiesto.

$$\left|\overline{AG}\right|=\left|\overline{BG}\right|\Leftrightarrow \overline{AG}^2=\overline{BG}^2 \qquad (1.b)$$

$$\overline{AG}^2=\left(x_G-x_A\right)^2+\left(y_G-y_A\right)^2=\frac{\left(2k-9\right)^2}{36}+\frac{4k^2}{9}$$

$$\overline{BG}^2=\left(x_G-x_B\right)^2+\left(y_G-y_B\right)^2$$

$$=\frac{\left(6+2k\right)^2}{36}+\frac{\left(9-2k\right)^2}{9};$$

k deve verificare l'equazione

$$\frac{\left(2k-9\right)^2}{36}+\frac{4k^2}{9}=\frac{\left(6+2k\right)^2}{36}+\frac{\left(9-2k\right)^2}{9}$$

Sviluppando i quadrati e riducendo i termini simili si ottiene un'equazione di primo grado la cui soluzione è $k=\frac{9}{4}$. Pertanto, se il triangolo ABG deve essere

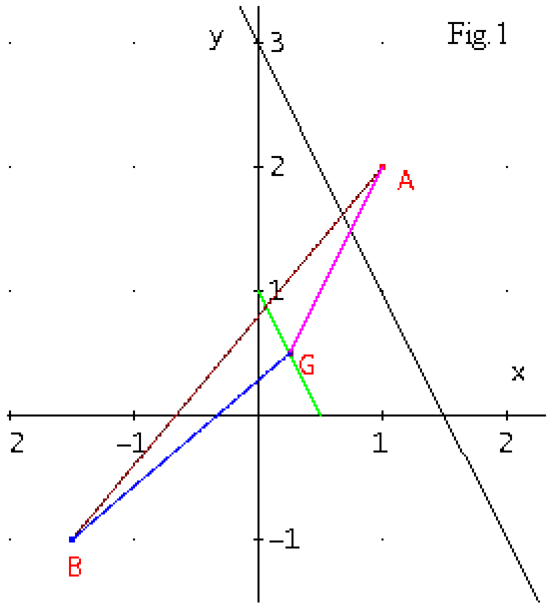


Fig. 1

isoscele su AB, il baricentro G può assumere solo una posizione e precisamente $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

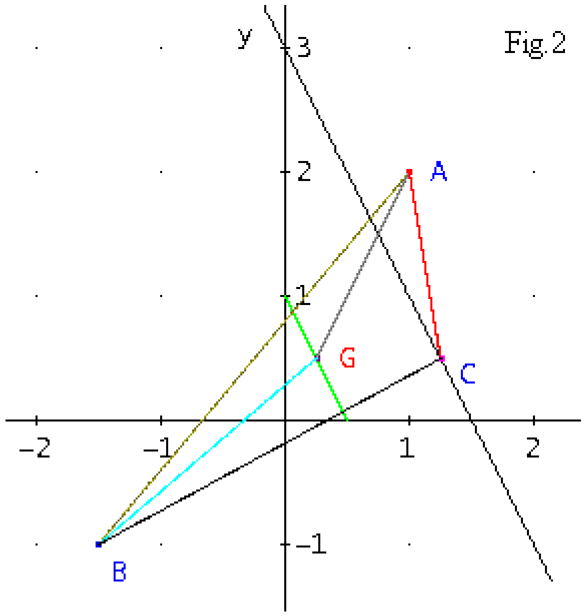
In Fig.1 è rappresentato il triangolo isoscele ABG. Nella stessa figura è rappresentato in colore verde il segmento descritto dal baricentro G quando il parametro k varia nell'intervallo [3/2;3].

Perimetro del triangolo ABC

Per il valore $k=\frac{9}{4}$ il terzo vertice C del triangolo ha coordinate

$$x_C=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4};$$

$$y_C=5-2\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow C\left(\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$$



Misure dei lati

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(-1-2\right)^2}=\frac{\sqrt{61}}{2};$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{4};$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{157}}{4}$$

Il perimetro del triangolo ABC è:

$$2p(ABC)=\frac{\sqrt{61}}{2}+\frac{\sqrt{37}+\sqrt{157}}{4}$$

In Fig.2 è riportata la figura completa relativa al problema risolto.