Geometria analitica della retta

(fascio improprio di rette)

Es_1)[(1)] Considerata in un piano cartesiano l'equazione del fascio di rette $3(1+k)x+4(1+k)y+2k+1=0$ risolvere i quesiti che seguono.

Q_1- Classificare il fascio determinando in particolare le rette generatrici g_1, g_2, precisando quale delle due è la retta limite. Rappresentare le due rette generatrici.

Q_2- Tra le rette del fascio, determinare l'equazione della retta r che passa dal punto A(0;3) e l'equazione della retta s passante da B(1;0). Rappresentare le due rette.

Q_3- Determinare la distanza tra le rette r, s.

Q_4- Indicati con A, A′ e con B, B′ rispettivamente i punti di intersezione delle rette r, s con gli assi cartesiani, determinare l'area del quadrilatero convesso di AA′B B′.

Soluzione

Q_1- Riscrivendo l'equazione in modo da separare i termini contenenti il parametro k dagli altri si individuano le equazioni delle rette generatrici. Si ha:

$$3(1+k)x+4(1+k)y+2k+1=0 \to \quad 3x+4y+1+k(3x+4y+2)=0$$

Le rette generatrici del fascio (rette basi) sono: $g_1: 3x+4y+1=0$, $g_2: 3x+4y+2=0$, delle quali g_2 è la retta limite (perché la sua equazione non si può ottenere dall'equazione del fascio per alcun valore reale del parametro k). Si osserva che le due rette generatrici hanno lo stesso coefficiente angolare, dunque sono parallele e perciò il fascio è improprio.

Q2- Si ottiene l'equazione della retta del fascio per A determinando il relativo valore del parametro; allo scopo si impone che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalle coordinate di A.
Analogo procedimento si applica per la retta che passa da B.

Retta per A: $12(1+k)+2k+1=0 \to k=-\frac{13}{4}$; l'equazione della retta è $r: 3x+4y-12=0$.

Retta per B: $3(1+k)+2k+1=0 \to k=-\frac{5}{4}$; l'equazione della retta è $s: 3x+4y-3=0$.

Q3- La **distanza tra le rette r, s** si può determinare come la distanza di un punto di r dalla retta s o viceversa. Scegliamo di determinare la distanza del punto A dalla retta s.

$$d(r,s)=d(A,s)=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 3-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$$

Q4- Le coordinate dei punti A′ e B′ sono: A′(4;0), B′(0;3/4).

Il quadrilatero AA′B B′ è un trapezio di basi AA′, B B′ le cui misure sono: $\overline{AA'}=5$, $\overline{BB'}=\frac{5}{4}$.

Avendo già determinato la distanza tra le rette r, s, poiché il valore rappresenta anche la misura dell'altezza del trapezio in esame, possiamo trovare subito la misura dell'area.

$$Area(AA'BB')=\frac{\left(\overline{AA'}+\overline{BB'}\right)\cdot d(r,s)}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(5+\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{9}{5}=\frac{45}{8}$$

Nella figura a lato sono rappresentati tutti gli elementi geometrici determinati.

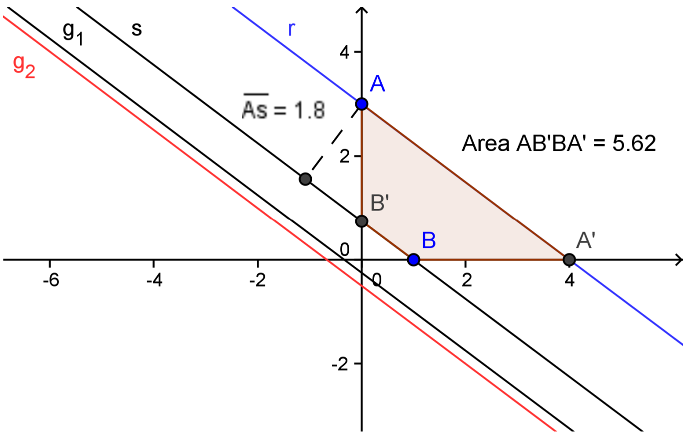

Figura 1

[(1)] Esercizio assegnato nel compito in classe M3_3I_22-01-10/ Classe terza Liceo Scientifico