Geometria analitica della retta

Baricentro, circocentro, ortocentro, area di un triangolo

Problema

a) Determinare il terzo vertice C del triangolo ABC sapendo che A(3;-1), B(-2;2) e l'ortocentro del triangolo è il punto $H\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

b) Trovare le coordinate del baricentro G e del circocentro D del triangolo ABC.

c) Verificare che i punti G, D, H sono allineati e calcolare il valore del rapporto $\frac{|\overline{GH}|}{|\overline{GD}|}$

d) Trovare i punti P del piano aventi ordinata tripla dell'ascissa e che formano con i punti A e B un triangolo di area uguale a quella del triangolo ABC.

Soluzione

a) Osserviamo che:

la retta che passa per A ed H contiene l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC$\rightarrow$AH$\perp$BC;

la retta che passa per B ed H contiene l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AC$\rightarrow$BH$\perp$AC.

Per determinare le coordinate del vertice C troviamo le equazioni delle rette dei lati AC, BC, quindi risolviamo il sistema formato da dette equazioni per. Le coordinate di C sono i valori della coppia $(x;y)$ soluzione del sistema suddetto.

a.1) Ricerca dell'equazione della retta del lato BC

Coefficiente angolare della retta [A;H]$\rightarrow$ $m\left([A;H]\right)=\frac{y_H-y_A}{x_H-x_A}=\frac{1}{3}$

Equazione del lato BC

$[B;C]\perp[A;H]\rightarrow$

$m\left([B;C]\right)=-\frac{1}{m\left([A;H]\right)}=-3\rightarrow$

$[B;C]: y-y_B=-3(x-x_B)\rightarrow$

$[B;C]: 3x+y+4=0$

a.2) Ricerca dell'equazione della retta del lato AC

Coefficiente angolare della retta [B;H]$\rightarrow$

$m\left([B;H]\right)=\frac{y_H-y_B}{x_H-x_B}=-1$

Equazione del lato AC

$[A;C]\perp[B;H]\rightarrow$

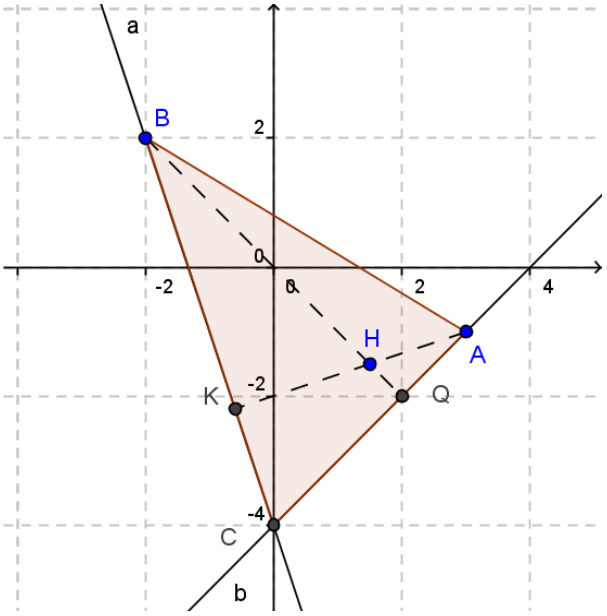

Figura 1

$$m([A;C]) = -\frac{1}{m([B;H])} = 1$$

$$[A;C]: y - y_A = 1(x - x_A) \rightarrow [A;C]: x - y - 4 = 0$$

a.3) Risoluzione del sistema formato dalle equazioni delle rette dei due lati AC, BC

$$\begin{cases} [A;C]: x - y - 4 = 0 \\ [B;C]: 3x + y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow C(0;-4)$$

b) Le coordinate del **baricentro** G del triangolo ABC sono:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3}; \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \rightarrow G\left(\frac{1}{3};-1\right)$$

Per trovare le coordinate del circocentro basta determinare le equazioni di due assi del triangolo e risolvere il sistema formato da dette equazioni.

Asse del lato AB

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \rightarrow a_1: 5x - 3y - 1 = 0$$

Asse del lato BC

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \rightarrow a_2: x - 3y - 2 = 0$$

Risoluzione del sistema per le coordinate del **circocentro** D

$$D: \begin{cases} a_1: 5x - 3y - 1 = 0 \\ a_2: x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow D\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$$

c) Verifichiamo che i tre punti G, D, H sono allineati facendo vedere che sussiste l'uguaglianza seguente:

$$\frac{x_D - x_G}{x_H - x_G} = \frac{y_D - x_G}{y_H - y_G} \rightarrow \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{3}{4} + 1}{-\frac{3}{2} + 1} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{C.V.D.}$$

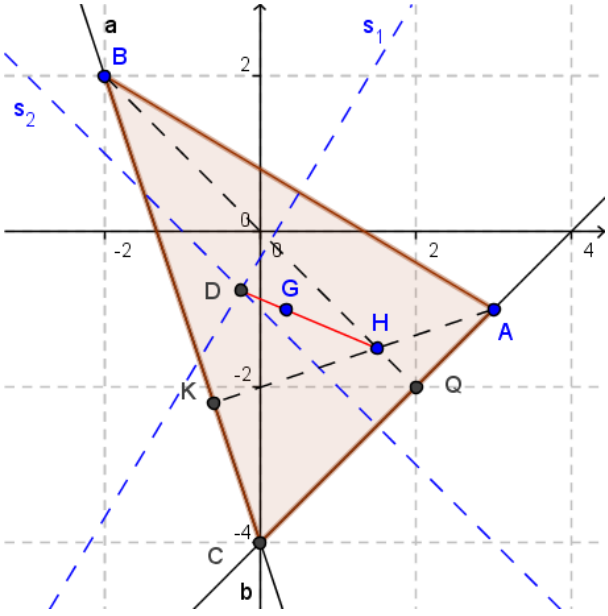

Figura 2

Osservazione

In un triangolo qualsiasi baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati e la retta che li contiene è detta la retta di Eulero del triangolo.

Calcolo del rapporto $\frac{|\overline{GH}|}{|\overline{GD}|}$

Il valore del rapporto richiesto si può determinare velocemente sfruttando le sole ascisse o le sole ordinate dei tre punti in virtù del teorema di Talete. Si ha:

$$\frac{\left|\overline{GH}\right|}{\left|\overline{GD}\right|}=\frac{\left|x_G-x_H\right|}{\left|x_G-x_D\right|}=\frac{\left|\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right|}{\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right|}=\frac{7}{6}:\frac{7}{12}=2$$

d) Poniamo P(α;3α). Calcoliamo l'area dei triangoli APB, ABC ed uguagliamole; si otterrà un'equazione dalla quale si determineranno i valori di α.
Occorre trovare la distanza dei punti P e C dalla retta del lato AB.

$$[A;B]: 3x+5y-4=0; \qquad \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{34}$$

$$d\left(P;[A;B]\right)=\frac{\left|3\alpha+5\cdot 3\alpha-4\right|}{\sqrt{34}}=\frac{\left|18\alpha-4\right|}{\sqrt{34}}; \quad d\left(C;[A;B]\right)=\frac{\left|3\cdot 0+5\cdot(-4)-4\right|}{\sqrt{34}}=\frac{24}{\sqrt{34}}$$

$$Area(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot d\left(C;[A;B]\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{24}{\sqrt{34}}=12;$$

$$Area(ABP)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot d\left(P;[A;B]\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{\left|18\alpha-4\right|}{\sqrt{34}}=\left|9\alpha-2\right|$$

Uguaglianza dei valori delle due aree

$$Area(ABP)=Area(ABC)\rightarrow$$

$$\left|9\alpha-2\right|=12\rightarrow$$

$$\left(\alpha_1=\frac{14}{9}\right)\vee\left(\alpha_2=-\frac{10}{9}\right)$$

Esistono due punti per i quali si verifica l'uguaglianza delle aree dei due triangoli e sono

$$P_1\left(\frac{14}{9};\frac{14}{3}\right),\ P_2\left(-\frac{10}{9};-\frac{10}{3}\right)$$

e quindi anche due triangoli diversi aventi in comune la base AB.
In Figura 3 sono rappresentati i tre triangoli ABC, ABP_1, ABP_2 aventi la stessa area.

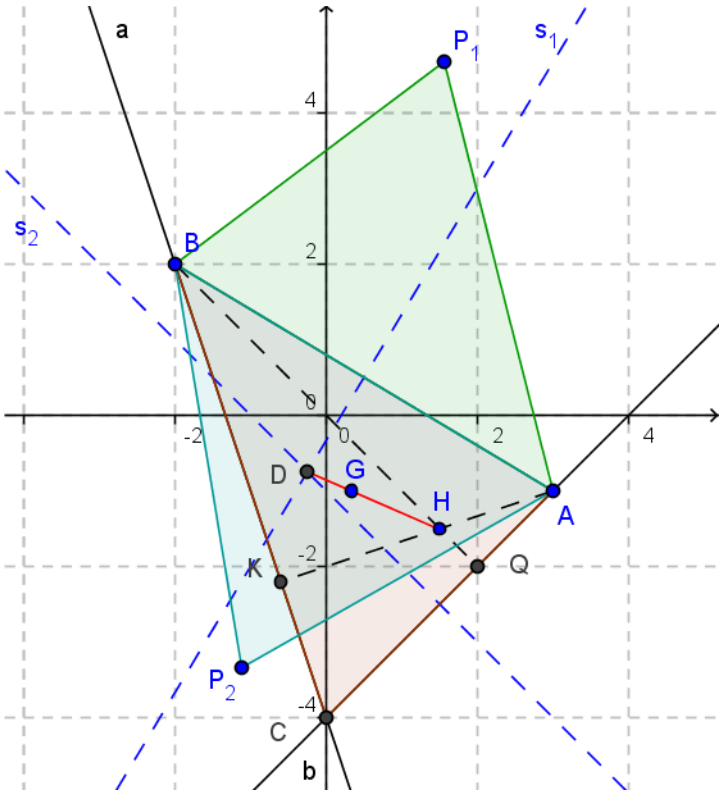

Figura 3