

Problema sui fasci di rette

Considerato il fascio di rette avente equazione

$$x + (k-1)y + 3k - 1 = 0 \quad (*)$$

risolvere i quesiti che seguono.

1. Classificare il fascio e determinare le equazioni delle rette generatrici.
2. Riconosciuto che si tratta di un fascio proprio, determinare le coordinate del centro C.
3. Determinare, qualora esistano, le equazioni delle rette del fascio che hanno dal punto P(-1;-1) distanza $d_1 = 2$, quelle che hanno distanza $d_2 = \sqrt{5}$, quelle che hanno distanza $d_3 = 3$.

Soluzione

1. Determinando le equazioni delle rette generatrici del fascio si potrà risalire al tipo di fascio di rette; le equazioni di queste ultime si determinano scrivendo l'equazione del fascio separando i termini contenenti il parametro dagli altri.

$$x - y - 1 + k(y + 3) = 0 \quad (**)$$

Le rette generatrici del fascio hanno equazioni

$$g_1 : x - y - 1 = 0, \quad g_2 : y + 3 = 0$$

Si riconosce immediatamente che le rette corrispondenti alle due equazioni sono incidenti, dunque il fascio è proprio.

2. Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni delle rette generatrici si trova come soluzione $x = -2, y = -3$. Il punto C(-2;-3) è dunque il centro del fascio in esame.
3. Prima di determinare le equazioni delle rette richieste, qualora esistano, è opportuno determinare la distanza del punto P dal centro del fascio e ciò perché al variare del parametro reale k la distanza del punto P dalla corrispondente retta del fascio ha come valore massimo proprio la misura del segmento CP.

$$d(C, P) = \overline{CP} = \sqrt{(-1+2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{5}$$

Osservazione

Dal valore ottenuto per la misura del segmento CP, in relazione alle richieste poste possiamo affermare che:

- esistono due rette distinte nel fascio la cui distanza dal punto P è $d_1 = 2$;
- esiste una sola retta del fascio la cui distanza da P è $d_2 = \sqrt{5}$ e si tratta della retta perpendicolare al segmento CP;
- non esistono rette del fascio aventi distanza $d_3 = 3$ perché il valore richiesto per la distanza è maggiore della distanza massima, che abbiamo precisato essere uguale a $\sqrt{5}$. Non riporteremo le elaborazioni algebriche che giustificano l'affermazione fatta, ma consigliamo il lettore di verificarla risolvendo l'equazione irrazionale corrispondente e scoprire perché non fornisce alcun valore utile⁽¹⁾ per il parametro k.

Determinazione delle rette richieste.

- Rette a distanza $d_1 = 2$ da P

Utilizzando la formula per il calcolo della distanza di un punto da una retta determiniamo la distanza di P dalla generica retta s del fascio ed impostiamo l'equazione uguagliandola al valore richiesto.

$$d(P, s) = \frac{|-1 + (k-1)(-1) + 3k - 1|}{\sqrt{1 + (k-1)^2}} = 2, \text{ l'equazione da risolvere è}$$

⁽¹⁾ Si ricordi che i valori di k devono essere reali al fine di ottenere equazioni che rappresentano rette reali

$$|2k-1| = 2\sqrt{1+(k-1)^2} \rightarrow |2k-1| = 2\sqrt{1+(k-1)^2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri e semplificando si ricava $k = \frac{7}{4}$ al quale valore

corrisponde la retta del fascio avente equazione

$$s_1: 4x + 3y + 17 = 0$$

Osservazione

Con la discussione precedente avevamo concluso che si sarebbero trovate due rette del fascio la cui distanza da P sarebbe stata uguale a 2. Risolvendo l'equazione algebrica impostata abbiamo trovato invece un solo valore per il parametro k e dunque saremmo indotti a concludere che esiste una sola retta. Dov'è la contraddizione? Rispondiamo velocemente alla questione.

Quando un fascio di rette è rappresentato utilizzando un'equazione con un solo parametro si deve tener presente che al variare del parametro dall'equazione del fascio non si riescono ad ottenere tutte le rette del fascio, ma ne manca una. Di ciò ci si può rendere conto osservando l'equazione del fascio in questione posta nella forma (**) dalla quale è evidente che l'equazione della retta generatrice $g_2: y + 3 = 0$ non può essere ottenuta per alcun valore reale del parametro. In effetti, osservato che per $k=0$ si ottiene dall'equazione del fascio quella della generatrice $g_1: x - y - 1 = 0$, si deduce che per le altre rette l'equazione può porsi nella seguente ulteriore forma

$$\frac{1}{k}(x - y - 1) + (y + 3) = 0 \quad (***)$$

Da questa forma algebrica si intuisce che per $|k| \rightarrow +\infty$ si perviene all'equazione $y+3=0$, appunto quella della generatrice g_2 ; dunque questa retta ha un'equazione che non è ottenibile per alcun valore reale del parametro k ma alla stessa tende la forma algebrica passando al limite per $|k| \rightarrow +\infty$. Per questo motivo la retta g_2 è nota come **retta esclusa** o **retta limite** del fascio; essa, però, è una retta del fascio a tutti gli effetti.

La risposta al quesito

La seconda retta del fascio avente distanza $d_1 = 2$ da P è proprio la retta esclusa suddetta. Per questo motivo non è stato ottenuto il corrispondente valore per il parametro k nella precedente elaborazione algebrica. Non si poteva trovare perché non esisteva!

- Retta a distanza $d_2 = \sqrt{5}$ da P

Come già visto per il precedente caso, al fine di determinare il valore del parametro k corrispondente alla retta del fascio avente distanza $\sqrt{5}$ da P si deve risolvere l'equazione seguente

$$d(P, s) = \frac{|-1 + (k-1)(-1) + 3k - 1|}{\sqrt{1+(k-1)^2}} = \sqrt{5}$$

che ridotta alla forma normale diventa

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 3$$

La retta s_2 del fascio richiesta ha equazione $s_2: x + 2y + 8 = 0$.

