Geometria analitica della retta

Fascio proprio di rette

Data l'equazione del fascio di rette
$F:(1+3k)x-(1+2k)y+2k+2=0$
Risolvere i quesiti che seguono.

a) Classificare il fascio e determinare le rette generatrici;
b) scrivere l'equazione della retta s′ del fascio parallela alla retta $s: 2x-y+5=0$;
c) scrivere l'equazione della retta t′ del fascio perpendicolare alla retta $t: x+y-3=0$;
d) trovare le equazioni delle rette del fascio che intersecano l'asse delle ascisse in un punto avente distanza 3 dall'origine degli assi;
e) in riferimento al precedente quesito d), riconosciuto che esistono due rette che verificano la proprietà indicata, calcolare l'area del triangolo formato da dette rette con l'asse delle ascisse.

Soluzione

a) Scriviamo l'equazione del fascio separando i termini contenenti il parametro dagli altri.
$F: x-y+2+k(3x-2y+2)=0$
Le rette generatrici sono: $g_1: x-y+2=0$, $g_2: 3x-2y+2=0$. Le due rette hanno coefficienti angolari diversi, dunque sono incidenti ed il fascio in questione è proprio.

b) La retta s ha coefficiente angolare m=2. Determinando il coefficiente angolare della generica retta del fascio ed imponendolo uguale a 2 si ottiene un'equazione nell'incognita k che risolta permette di determinare il valore del parametro per il quale si ottiene la retta s′.
$m(k)=\dfrac{1+3k}{1+2k}=2 \to 1+3k=2+4k \to k=-1$. La retta richiesta è $s': 2x-y=0$.

c) Poiché la retta t ha coefficiente angolare m=-1, la retta t′, dovendo essere perpendicolare a t, dovrà avere coefficiente angolare $m'=-\dfrac{1}{m(t)}=1$, quindi deve risultare

$m(k)=\dfrac{1+3k}{1+2k}=1 \to 1+3k=1+2k \to k=0$ Per il valore trovato si ottiene proprio la retta generatrice $g_1 \to t' \equiv g_1: x-y+2=0$.

d) Si deve determinare l'ascissa del punto di intersezione della generica retta del fascio con l'asse delle ascisse ed imporre che il suo valore assoluto sia uguale a 3.

$$\begin{cases} F:(1+3k)x-(1+2k)y+2k+2=0 \\ y=0 \end{cases} \to x=-\frac{2k+2}{3k+1}$$

$$\left|-\frac{2k+2}{3k+1}\right|=3 \to \left(k_1=-\frac{1}{7}\right) \vee \left(k_2=-\frac{5}{11}\right)$$

Esistono due rette del fascio che hanno la proprietà indicata e sono

$$k_1=-\frac{1}{7} \to u_1: 4x-5y+12=0;\quad k_2=-\frac{5}{11} \to u_2: 4x+y-12=0$$

La retta u_1 interseca l'asse *x* nel punto A(-3;0) e la retta u_2 interseca lo stesso asse nel punto B(3;0).
Nella figura che segue sono rappresentate tutte le rette determinate.

e) Area del triangolo ABC

Le due rette u_1, u_2 appartenendo al fascio F passano dal centro di questo, che è C(2;4).
Assumendo come base del triangolo ABC il segmento AB, l'altezza corrispondente misura $|y_C| = 4$, per cui l'area del triangolo ABC è:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot |y_C| = \frac{1}{2} \cdot |x_B - x_A| \cdot |y_C| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$