

Geometria analitica della retta

(due quadrati simmetrici)

¹Problema_1

Dati i vertici A(-1;4) , B(1;1) del quadrato ABCD, determinare le coordinate degli altri due vertici C, D.

Soluzione

Strategia risolutiva

Osserviamo subito che nel piano cartesiano xOy esistono due quadrati distinti che hanno il segmento AB come lato. I due quadrati sono simmetrici rispetto alla retta s che contiene AB; gli altri due vertici si trovano sulle rette parallele alla retta passante per A e B ed a distanza da questa pari alla misura di AB. Le rette sono situate nei due semipiani opposti aventi per origine la retta s. Dette r' , r'' le rette contenenti i vertici C, D, determineremo innanzitutto le equazioni di r' , r'' scrivendo l'equazione del fascio improprio di rette determinato dalla retta s, quindi determineremo le coordinate dei vertici C, D scrivendo le equazioni della retta s' per B perpendicolare ad s e della retta s'' per A perpendicolare ad s.

Risolviendo i sistemi di equazioni formati dalle coppie di rette (s' ; r'), (s'' ; r'') troveremo i punti mancanti C', D' del primo quadrato; analogamente, risolvendo sistemi di equazioni formati dalle coppie di rette (s' ; r''), (s'' ; r') troveremo i punti mancanti C'', D'' del secondo quadrato.

Elaborazioni

✚ Distanza AB:

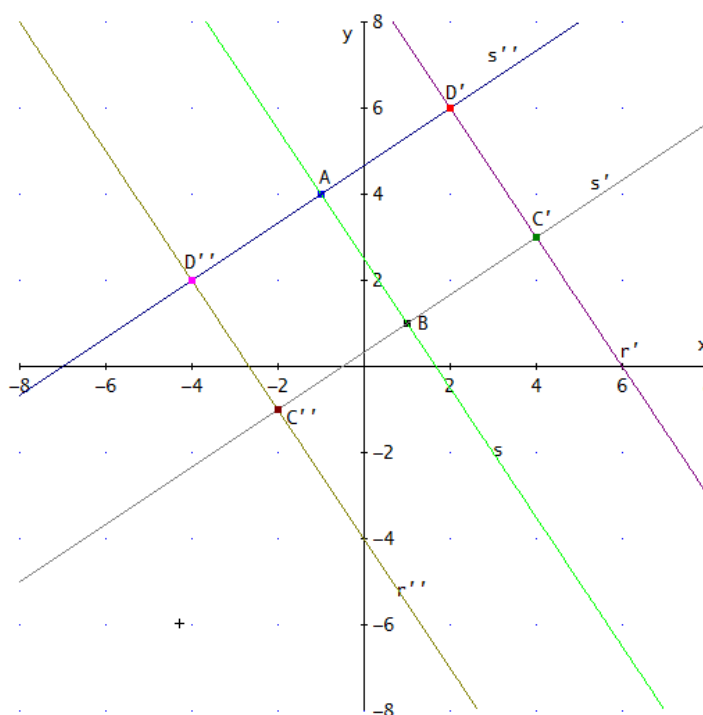
$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

✚ Troviamo l'equazione della retta s.

$$s: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \rightarrow$$
$$s: 3x + 2y - 5 = 0$$

✚ Scriviamo l'equazione del fascio improprio F di rette determinato da s.

$$F: y = -\frac{3}{2}x + q$$



Il generico punto P di una retta del fascio ha coordinate $P\left(\alpha; -\frac{3}{2}\alpha + q\right)$. Per determinare le equazioni delle due rette r' , r'' del fascio imponiamo che la distanza di P dalla retta s sia uguale alla misura $\overline{AB} = \sqrt{13}$.

$$d(P; s) = \frac{\left|3\alpha + 2\left(-\frac{3}{2}\alpha + q\right) - 5\right|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|2q - 5|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |2q - 5| = 13 \rightarrow (q = 9) \vee (q = -4)$$

Concludiamo che le due rette cercate sono:

$$r': y = -\frac{3}{2}x + 9, \quad r'': y = -\frac{3}{2}x - 4$$

✚ Equazioni delle rette s' , s'' .

¹ Problema richiesto dall'utente della rete F.P.

Il coefficiente angolare delle rette s' , s'' è $m=2/3$ perché sono perpendicolari alla retta s . Si ha

$$s': y - y_B = \frac{2}{3}(x - x_B) \rightarrow s': y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}; \quad s'': y - y_A = \frac{2}{3}(x - x_A) \rightarrow s'': y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}.$$

✚ Ricerchiamo i vertici del quadrato che si trovano su r' .

$$\{C'\} = r' \cap s': \begin{cases} r': y = -\frac{3}{2}x + 9 \\ s': y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow C'(4;3);$$

$$\{D'\} = r' \cap s'': \begin{cases} r': y = -\frac{3}{2}x + 9 \\ s'': y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \end{cases} \rightarrow D'(2;6)$$

✚ I vertici C'' , D'' del quadrato che si trovano su r'' si trovano intersecando le rette s' , s'' con la retta r'' . Riportiamo sono i risultati.

$$\{C''\} = r'' \cap s' \rightarrow C''(-2;-1); \quad \{D''\} = r'' \cap s'' \rightarrow D''(-4;2)$$

Gli elementi trovati sono rappresentati nella figura riportata sopra.