Geometria analitica del piano

Un triangolo di cui sono noti gli estremi di una mediana. Applicazione della simmetria centrale.

Nel sistema di riferimento cartesiano xOy il triangolo ABC ha come estremi della AM i punti A(-2;0), M(2;3). Risolvere i quesiti che seguono.

Q_1) Determinare le coordinate del Baricentro G del triangolo.

Q_2) Nell'ipotesi che sia B (k;1), determinare il valore del parametro k in modo che l'area del triangolo ABC valga 8.

Elaborazioni

1) **Premessa teorica** - Ricordiamo che **il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella contenente il vertice ha misura doppia dell'altra**. Sfruttando adeguatamente questa proprietà potremo determinare le coordinate del baricentro G.
   a. Osserviamo che i due punti A ed M hanno ascisse e ordinate diverse; quindi, il segmento AM non è parallelo ad alcuno degli assi cartesiani.
   b. Sia $G(x_G;y_G)$ il punto da determinare. Possiamo considerare il fascio di rette parallele all'asse y e tra queste puntare l'attenzione sulle rette r_A, r_G, r_M, passanti rispettivamente per A, per G e per M. Consideriamo altresì come trasversali del fascio suddetto la retta [A;M] e l'asse delle ascisse. Siano A'≡A, G', M' i punti di intersezione di r_A, r_G, r_M con l'asse x; dunque risulta A'(-2;0), $G'(x_G;0)$, $M'(x_M;0)$. Applichiamo il teorema di Talete al suddetto fascio di rette tagliato dalle trasversali indicate. Sussiste la seguente proporzione tra i segmenti A'G':G'M'=AG:GM. Utilizzando **le misure orientate dei segmenti A'G', G'M'**, con $A'G'=x_G-x_A$, $G'M'=x_M-x_G$ e sapendo che AG≅2GM possiamo scrivere l'uguaglianza

      $(x_G-x_A):(x_M-x_G)=2:1$, dalla quale ricaviamo anche $x_G-x_A=2(x_M-x_G)$, da cui

      $$x_G=\frac{x_A+2x_M}{3}=\frac{-2+2\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}.$$

      Con procedimento analogo possiamo determinare l'ordinata del baricentro considerando il fascio di rette parallele all'asse delle ascisse, fissando in particolare l'attenzione sulle rette passanti per i punti A, G, M e come trasversali l'asse delle ordinate e ancora la retta [A;M]. Sempre applicando il teorema di Talete possiamo scrivere la seguente proporzione:

      $(y_G-y_A):(y_M-y_G)=2:1$, da cui si ricava l'equazione $y_G-y_A=2(y_M-y_G)$ e quindi si ottiene

      $$y_G=\frac{y_A+2y_M}{3}=\frac{0+2\cdot 3}{3}=2.$$

      In conclusione, il baricentro del triangolo è il punto $G\left(\frac{2}{3};2\right)$.

2) **Strategia risolutiva** - Per determinare il valore del parametro k che compare come ascissa del vertice B notiamo che **B e C sono simmetrici rispetto al punto medio M del lato BC**. Pertanto, poiché sono note le coordinate di B, possiamo utilizzare la proprietà della **simmetria centrale** per ricavare le coordinate del vertice C. Ciò fatto, determineremo il valore dell'**area del triangolo ABC in funzione delle coordinate dei tre vertici utilizzando il metodo del determinante del terzo**

ordine. Uguagliando il valore calcolato per l'area del triangolo a quello assegnato (valore 8) otterremo un'equazione nell'incognita k da risolvere; in base al numero delle soluzioni che si troveranno si dedurrà il numero dei casi geometrici che si potranno presentare per il triangolo ABC in oggetto.

a. $\frac{x_B+x_C}{2}=x_M \rightarrow x_C=2x_M-x_B \;=2\cdot 2-k=4-k$; $\qquad \frac{y_B+y_C}{2}=y_M \rightarrow \; y_C=2y_M-y_B \;=2\cdot 3-1=5$.

   Quindi C(4-k;5).

b. L'area del triangolo ABC è

$$Area(ABC)=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 4-k & 5 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(-2+0+5k)-(4-k-10+0)\right| \;=\frac{1}{2}|6k+4|=|3k+2|.$$

   Imponiamo che l'area del triangolo valga 8 e risolviamo la corrispondente equazione.

   $|3k+2|=8 \rightarrow 3k+2=\pm 8$, quindi $3k=-2\pm 8$;

   da $3k=-10 \rightarrow k_1=-\frac{10}{3}$, cui corrisponde il vertice $B_1\left(-\frac{10}{3};1\right)$;

   da $k_2=6 \rightarrow k_2=2$, cui corrisponde il vertice $B_2(2;1)$.

   Evidentemente ci sono due possibilità anche per il vertice C e saranno:

   $k_1=-\frac{10}{3} \rightarrow C_1\left(4+\frac{10}{3};5\right)=\left(\frac{22}{3};5\right)$; $k_2=2 \rightarrow C_2(4-2;5)=(2;5)$.

Conclusione - Esistono due triangoli aventi le proprietà richieste nel problema e sono il primo quello di vertici A(-2;0), $B_1\left(-\frac{10}{3};1\right)$, $C_1\left(\frac{22}{3};5\right)$, il secondo quello avente come vertici A(-2;0), $B_2(2;1)$, $C_2(2;5)$.

In Figura 1 sono rappresentati tutti gli elementi geometrici elaborati nel problema risolto.

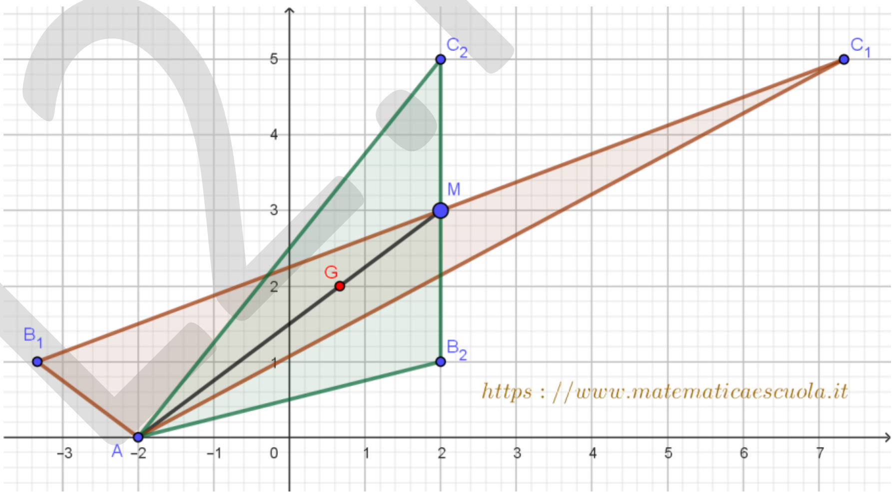

Figura 1