Geometria analitica della retta

Studio di un fascio proprio

Problema

Si consideri l'equazione cartesiana $F:(k+2)x+(k-1)y+k+2=0$ al variare del parametro k∈R.

Risolvere i seguenti quesiti.

1) Determinare le equazioni delle rette generatrici del fascio e precisare il tipo fascio.

2) Riconosciuto che si tratta di un fascio proprio, determinare le coordinate del suo centro C.

3) Considerati i punti A(1;0), B(0;-2) stabilire per quali valori del parametro le corrispondenti rette del fascio tagliano il segmento di estremi A, B.

4) Realizzare nel piano cartesiano xOy una figura contenente gli elementi geometrici elaborati nei precedenti quesiti.

Elaborazioni

1) Per determinare le equazioni delle rette generatrici del fascio si devono eseguire i prodotti nel primo membro dell'equazione e separare i termini contenenti il parametro k dagli altri.

$$F:(k+2)x+(k-1)y+k+2=0 \rightarrow k(x+y+1)+(2x-y+2)=0$$

Le rette generatrici del fascio sono $g_1:x+y+1=0$, $g_2:2x-y+2=0$.

Osserviamo che la retta g_2 si ottiene per k=0, mentre la retta g_1 non si può ottenere per alcun valore reale di k e viene detta la **retta limite del fascio** perché assegnando al parametro k valori che crescono verso $+\infty$ o che decrescono verso $-\infty$ la retta del fascio tende a sovrapporsi alla retta g_1.

Le due rette generatrici del fascio hanno coefficienti angolari diversi: $m(g_1)=-1$, $m(g_2)=2$, dunque sono incidenti e quindi il fascio di rette è proprio ed il suo centro è il punto C citato nel successivo quesito.

2) Le coordinate del centro C del fascio si determinano risolvendo il sistema formato dalle equazioni di due qualsiasi rette del fascio; in particolare possiamo utilizzare le equazioni delle rette generatrici del fascio. Si ha:

$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ Sommando membro a membro le due equazioni si ricava 3x+3=0 da cui x=-1;

ponendo x=-1 nella prima equazione si ottiene y=0. Dunque il centro del fascio è C(-1;0).

3) Per risolvere questo quesito occorre fare riferimento al coefficiente angolare della generica retta del fascio e confrontarlo con i coefficienti angolari delle rette del fascio che passano per gli estremi del segmento AB. Il percorso algebrico che si segue tiene conto del significato geometrico del coefficiente angolare di una retta.

Per questo motivo determiniamo innanzitutto le rette del fascio r_A, r_B, che passano rispettivamente per A e B.

Aggiungiamo che particolare attenzione deve porsi sulla retta limite del fascio osservandone la posizione rispetto al predetto segmento AB.

3.1) Ricerca della retta per A(1;0)

$A \in F \rightarrow (k+2)\cdot 1+(k-1)\cdot 0+k+2=0 \rightarrow 2(k+2)=0 \rightarrow k=-2$. La corrispondente retta r_A ha equazione

y=0, quindi coincide con l'asse delle ascisse.

3.2) Ricerca della retta per B(0;-2)

$B \in F \rightarrow (k+2)\cdot 0+(k-1)\cdot(-2)+k+2=0 \rightarrow -2k+2+k+2=0 \rightarrow k=4$. La retta passante per B è:

$r_B : 2x+y+2=0$.

3.3) Coefficienti angolari delle due rette per gli estremi A e B sono : $m(r_A)=0$, $m(r_B)=-2$. Coefficiente angolare della generica retta s del fascio

$m(s)=-\dfrac{k+2}{k-1}$, con $k \neq 1$.

Osserviamo che **le rette del fascio che tagliano il segmento AB in un punto interno** formano con il semiasse positivo delle ascisse un angolo ottuso e dunque hanno coefficiente angolare negativo. Prima di avviare il percorso algebrico è opportuno stabilire se la retta limite interseca il segmento AB. Determiniamo l'equazione della retta [A;B] e risolviamo il sistema composto da detta equazione e dall'equazione della retta limite. Si riconosce che la retta [A;B] ha equazione

[A;B]: y=2x-2. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} [A;B]: y=2x-2 \\ g_1 : x+y+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x+2x-2+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2\cdot\frac{1}{3}-2=-\frac{4}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

La retta limite taglia il segmento AB nel punto $L\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

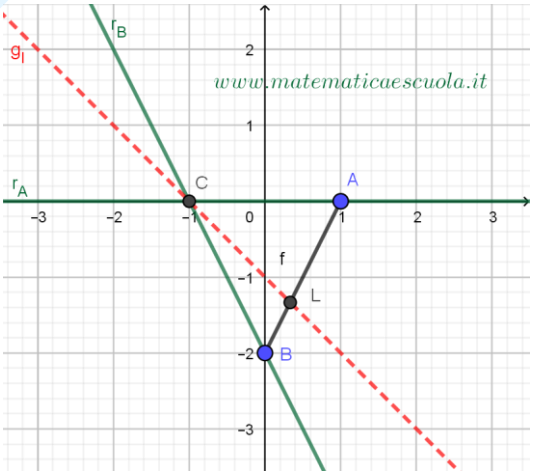

Figura 1

In **Figura 1** sono riportati il centro C del fascio, le rette r_A, r_B e la retta limite g_1.

Dalla posizione della retta limite si evince che le rette del fascio che intersecano il segmento AB sono quelle che intersecano questo in un punto del segmento LA e quelle che intersecano il segmento in un punto del segmento BL.

Quelle che intersecano il segmento LA hanno coefficiente angolare negativo ma maggiore del coefficiente angolare della retta limite. Si ottengono dette rette dai valori del parametro k che soddisfano la seguente doppia disuguaglianza

0>m(s)>m(g_1), quindi $0>-\frac{k+2}{k-1}>-1$. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} -\frac{k+2}{k-1}<0 \\ -\frac{k+2}{k-1}>-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{k+2}{k-1}>0 \\ \frac{k+2}{k-1}<1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{k+2}{k-1}>0 \\ \frac{3}{k-1}<0 \end{cases}$$ Le soluzioni di questo sistema sono i valori k<-2.

Le rette del fascio che intersecano il segmento BL sono quelle il cui coefficiente m(s) verifica la doppia disuguaglianza m(r_B)≤m(s)< m(g_1), quindi $-2\le -\frac{k+2}{k-1}<-1$. Si deve pertanto risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} -\frac{k+2}{k-1}\ge -2 \\ -\frac{k+2}{k-1}<-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{k+2}{k-1}\le 2 \\ \frac{k+2}{k-1}>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4-k}{k-1}\le 0 \\ \frac{3}{k-1}>0 \end{cases}$$. La prima disequazione è soddisfatta per (k<1)∨(k≥4); la seconda è soddisfatta per (k>1), quindi il sistema è soddisfatto per (k≥4).

Unendo gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi si conclude che le rette del fascio che intersecano il segmento AB sono quelle che si ottengono per i valori del parametro k tali che: (k<-2) ∨(k≥4).

4) La figura geometrica richiesta è riportata in **Figura 1**.

Studio L2.mat