Geometria analitica della retta

Sui luoghi geometrici

Problema

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale si consideri la retta r:3x-5y+4=0.

Q1- Si determinino i punti di r che hanno distanza 2 dall'asse delle ordinate.

Q2- Riconosciuto che esistono due punti che soddisfano la proprietà richiesta nel precedente quesito e detti P_1, P_2, si determinino le loro proiezioni P_1', P_2' ortogonali sull'asse y. Classificare il quadrilatero convesso $P_1\ P_1'\ P_2\ P_2'$ e si determinino di questo perimetro e area.

Q3- Rappresentare nel piano cartesiano tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

Q1- Sia P(α;β) il generico punto della retta r. Per definizione le coordinate di P devono verificare l'equazione della retta r, dunque sussiste l'uguaglianza:

$$3\alpha-5\beta+4=0 \qquad (1)$$

Ancora, la distanza di un punto dall'asse y è data dal valore assoluto della sua ascissa, quindi per il punto P deve aversi $|\alpha|=2$ e perciò deve risultare $(\alpha=2)\vee(\alpha=-2)$.

Dalla (1) con $\alpha=2$ si ricava $6-5\beta+4=0$, da cui $\beta=2$; quindi il primo punto è $P_1(2;2)$.

Ponendo ancora nella (1) $\alpha=-2$ si ricava l'equazione $-6-5\beta+4=0$, da cui $\beta=-2/5$. Esiste dunque un secondo punto avente distanza 2 dall'asse y ed è $P_2(-2;-2/5)$.

Q2- Le proiezioni ortogonali sull'asse y dei punti P_1, P_2 sono ordinatamente $P_1'(0;2)$, $P_2'(0;-2/5)$.

Il quadrilatero convesso $P_1\ P_1'\ P_2\ P_2'$ è un parallelogramma perché ha i due lati P_1P_1', P_2P_2' che sono paralleli(1) e congruenti(2) .

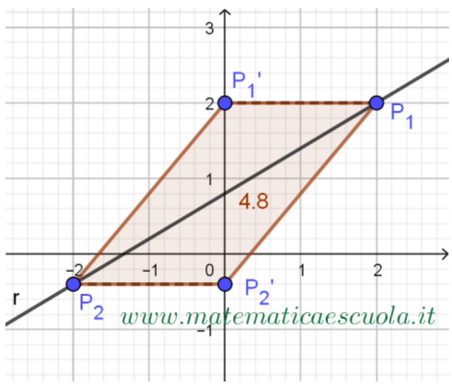

Figura 1

Calcolo del perimetro del parallelogramma

Sappiamo già che $\overline{P_1P_1'}=2$, $\overline{P_2P_2'}=2$. Determiniamo la misura comune dei due lati $\overline{P_1'P_2}$, $\overline{P_1P_2'}$ applicando la formula per la distanza fra due punti.

$$\overline{P_1'P_2}=\sqrt{(2)^2+\left(2+\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}\sqrt{61}$$

(1) I due segmenti sono paralleli tra loro perché entrambi perpendicolari all'asse delle ordinate.
(2) I due segmenti sono congruenti perché entrambi hanno misura 2.

Il perimetro del parallelogramma misura: $2p = 4\left(\frac{\sqrt{61}}{5}+1\right)$.

Per il calcolo dell'area del parallelogramma $P_1\ P_1'\ P_2\ P_2'$ si può osservare che esso è composto dall'unione dei due triangoli rettangoli $P_1P_1'P_2'$, $P_1'P_2'P_2$, che sono congruenti e dei quali si può trovare l'area S come il semiprodotto delle misure dei due cateti,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\overline{P_1P_1'}\cdot\overline{P_1'P_2'} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(2+\frac{2}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

o ancora meglio, poiché l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della misura di una base per la relativa altezza, assunto come base il segmento P_2P_2' , la relativa altezza è proprio il segmento $P_1'P_2'$ e quindi si ottiene direttamente l'area del parallelogramma

$$Area = \overline{P_2P_2'}\cdot\overline{P_1'P_2'} = \frac{24}{5} = 4{,}8\,.$$