La retta nel piano cartesiano

Sui fasci di rette

Esercizi

1. Spiegare perché fra le rette del fascio avente (2k-3)x-(2k-3)y-3k=0 non vi è alcuna retta che sia parallela agli assi cartesiani; successivamente determinare le equazioni delle due rette corrispondenti ai valori k=0 e k=1 e le si rappresenti nello stesso riferimento cartesiano.
2. Considerata la retta r:x+y-2=0 ed il fascio di rette F:(k+2)x+2ky-3=0, determinare i valori di k per i quali si ottengono le rette r', r'' del fascio rispettivamente parallela e perpendicolare alla retta r. Rappresentare le tre rette r, r', r'' nello stesso riferimento cartesiano.
3. Considerate le equazioni dei due fasci di rette F_1: kx-y+2k-1=0, F_2: (h+1)x+y-1=0, determinare l'equazione della retta comune ai due fasci.

Elaborazioni

1. Osserviamo che dall'equazione (2k-3)x-(2k-3)y-3k=0 si ottiene una retta nel piano cartesiano per ogni k≠3/2; infatti, per k=3/2 si annullano entrambi i coefficienti di x ed y e ciò non può essere[(1)]. Inoltre, per k≠3/2 il coefficiente angolare della generica retta del fascio è m=1, quindi tutte le rette del fascio sono tra loro parallele ed in particolare sono parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante che taglia entrambi gli assi cartesiani, quindi ogni retta del fascio interseca entrambi gli assi cartesiani.
   a. Per k=0 si ottiene l'equazione r_1:-3x+3y=0→y=x, che è la bisettrice del primo e terzo quadrante.
   b. Per k=1 si ottiene l'equazione r_2:-x+y-3=0→y=x+3.

   Le due rette sono rappresentate in Figura 1.

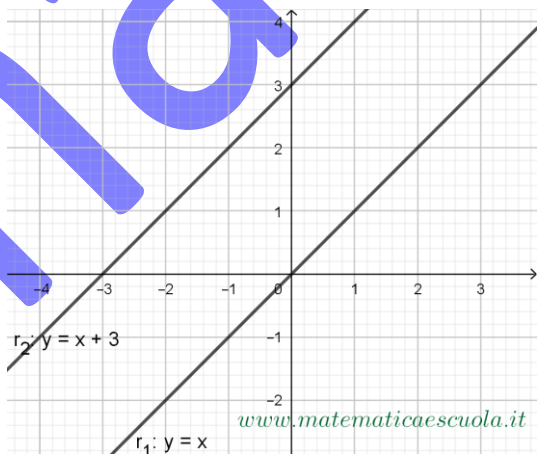

Figura 1

2. La retta r:x+y-2=0 ha coefficiente angolare m=-1. La generica retta del fascio F:(k+2)x+2ky-3=0 per k≠0 ha coefficiente angolare m'=-(2+k)/(2k). Per ottenere dal fascio la retta r' parallela ad r deve risultare -(k+2)/(2k) =-1, da cui k=2. La retta r' ha equazione r':4x+4y-3=0.

   La retta r'' del fascio perpendicolare alla retta r deve avere coefficiente angolare m''=-1, quindi si ricava il valore del parametro k risolvendo

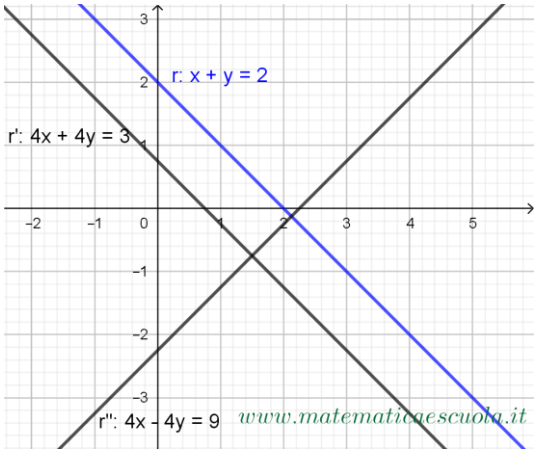

Figura 2

[(1)] L'equazione ax+by+c=0 rappresenta una retta nel piano cartesiano se e solo se la coppia (a;b)≠(0;0).

l'equazione -(k+2)/(2k)=1, da cui k=-2/3. L'equazione richiesta è r'':4x-4y-9=0.

Le tre rette r, r', r'' sono rappresentate in Figura 2.

3.

a. Osserviamo che i due fasci sono propri, e ciò si riconosce perché il parametro che li caratterizza è presente con esponente uno e il coefficiente angolare della generica retta del fascio, in entrambi i casi, dipende dal parametro.

b. Per **trovare la retta comune ai due fasci** possiamo imporre la condizione algebrica affinché le due equazioni dei fasci in oggetto rappresentino la stessa retta; detta condizione consiste nel richiedere che i coefficienti delle due equazioni siano proporzionali, cioè che risultino vere le uguaglianze:

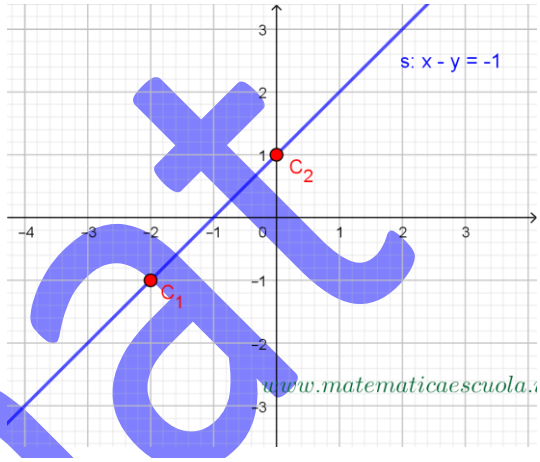

Figura 3

$\frac{k}{h+1}=\frac{-1}{1}=\frac{2k-1}{-1}$, dalle quali cui si ottiene il sistema $\begin{cases} k=-h-1 \\ 2k-1=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h=-2 \\ k=1 \end{cases}$

Si conclude che la retta comune ai due fasci si ottiene ponendo k=1 nell'equazione del primo fascio, oppure h=-2 nell'equazione del secondo fascio. La retta è s:x-y+1=0.

In Figura 3 sono rappresentati i centri dei due fasci e la retta comune ai fasci.

Osservazione (didattica)

Dopo aver riconosciuto che le due equazioni rappresentano due fasci propri, si può seguire un procedimento alternativo per determinare la retta comune ai due fasci, precisamente, si trovano le coordinate del centro di uno dei due fasci, quindi si impone che dette coordinate soddisfino l'equazione dell'altro fascio; in questo modo si trova il valore del parametro che sostituito nell'equazione del secondo fascio permette di ricavare direttamente l'equazione della retta comune ai due fasci.

Si osservi che per trovare le coordinate del centro di un fascio si possono assegnare due valori a piacere al parametro nell'equazione del fascio scelto individuando in tal modo le equazioni delle due corrispondenti rette del fascio; si risolve il sistema formato dalle equazioni di dette rette e la soluzione trovata rappresenta le coordinate del centro del fascio.

Chiudiamo queste note precisando che il centro del fascio F_1 è $C_1(-2;-1)$ e il centro del fascio F_2 è $C_2(0;1)$.