Fascio improprio di rette

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri il fascio di rette di equazione $F:(k+1)x+2(k+1)y+k=0$

1. Determinare le rette generatrici del fascio, precisando quale delle due sia la retta limite. Classificare il fascio.
2. Riconosciuto che il fascio è improprio, determinare la distanza tra le due rette generatrici.
3. Determinare l'equazione della retta r_1 del fascio passante dal punto A(0;2) e quella retta r_2 perpendicolare ad r_1 passante per l'origine degli assi. Sia H il punto di intersezione di r_1 con r_2. Determinare area e perimetro del triangolo OAH.
4. Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo OAH.
5. Rappresentare graficamente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

1. Le rette generatrici del fascio si determinano sviluppando l'equazione cartesiana e separando i termini contenenti il parametro k dagli altri.

   $$F:(k+1)x+2(k+1)y+k=0 \rightarrow k(x+2y+1)+(x+2y)=0$$

   Le due rette generatrici sono $g_1: x+2y+1=0$, $g_2: x+2y=0$; **g_1 è la retta limite[1] del fascio**.

   Osserviamo che le generatrici sono parallele tra loro perché hanno uguale il coefficiente angolare che è m=-1/2; il fascio di rette dunque è improprio.

2. Poiché le rette generatrici del fascio sono tra loro parallele la loro distanza si può determinare trovando la distanza di un punto appartenente ad una delle due rette dall'altra retta. Visto che la retta g_2 passa per l'origine O degli assi determiniamo la distanza di O dalla generatrice g_1.

   $$d(g_1;g_2)=d(O;g_1)=\frac{|0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. Per determinare la retta r_1 del fascio passante dal punto A(0;2) imponiamo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalle coordinate di A. Si ha:

   $A(0;2)\in F \rightarrow (k+1)\cdot 0+2(k+1)\cdot 2+k=0$, da cui $k=-\frac{4}{5}$.

   La retta cercata è $r_1: x+2y-4=0$.

   La retta per l'origine O(0;0) degli assi perpendicolare ad r_1 ha equazione $r_2: 2x-y=0$. Le coordinate del punto di intersezione H tra r_1 ed r_2 si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

[1] Precisiamo che la denominazione della retta è dovuta al fatto che la corrispondente equazione non si può ottenere a partire dall'equazione del fascio per alcun valore di k ma alla suddetta equazione tende la forma algebrica per $k\rightarrow\infty$.

$$H:\begin{cases} r_1: x+2y-4=0 \\ r_2: 2x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2\cdot 2x-4=0 \\ y=2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$ Dunque $H\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Determiniamo il perimetro del triangolo trovando la misura dei tre lati applicando la formula della distanza tra due punti.

$$\overline{OA}=2;\ \overline{AH}=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-0\right)^2+\left(\frac{8}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}\sqrt{5};$$

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$$

Perimetro(OAH)= $\overline{OA}+\overline{AH}+\overline{OH}=2+\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{4}{5}\sqrt{5}=2+\frac{6}{5}\sqrt{5}$

Area del triangolo OAH

$$Area(OAH)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{5}=\frac{4}{5}$$

4. Ricordiamo che il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle tre mediane. Per un triangolo di vertici A,B,C, quando sono note le coordinate dei tre vertici quelle del baricentro si ottengono con le seguenti formule:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\qquad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Nel caso in esame si ha

$$x_G=\frac{x_O+x_A+x_H}{3}=\frac{4}{15};\ y_G=\frac{y_O+y_A+y_H}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{8}{5}\right)=\frac{6}{5}$$

5. La figura con tutti gli elementi geometrici elaborati è a margine.