Proprietà del segmento parabolico (sintesi)

(Area del segmento parabolico e Teorema di Archimede)

Considerata la parabola $\gamma : y = ax^2$ e due suoi punti distinti $A\left(x_1; ax_1^2\right)$, $B\left(x_2; ax_2^2\right)$, la retta congiungente A e B determina con la parabola un segmento parabolico la cui area può essere determinata con il seguente

Teorema (detto di Archimede)

Considerata una parabola γ e due suoi punti A, B, l'area della regione finita di piano delimitata dalla corda AB e dalla parabola, detta segmento parabolico, è pari ai 2/3 dell'area del rettangolo i cui lati sono il segmento AB e l'altezza del segmento parabolico, definita come la distanza tra la retta [A;B] e la tangente alla parabola parallela ad [A;B].

Ritenuta come acquisita la tesi del precedente teorema, vogliamo qui provare che il segmento parabolico gode della seguente

Proprietà

L'area del segmento parabolico delimitato dalla corda AB, è pari ai 2/3 dell'area del triangolo delimitato dalla retta [A;B] e dalle due rette tangenti alla parabola nei punti A e B.

In relazione alla Figura_1 si ha

$$Area(Seg\_parab\_AB) = \frac{2}{3} Area(ABC)$$

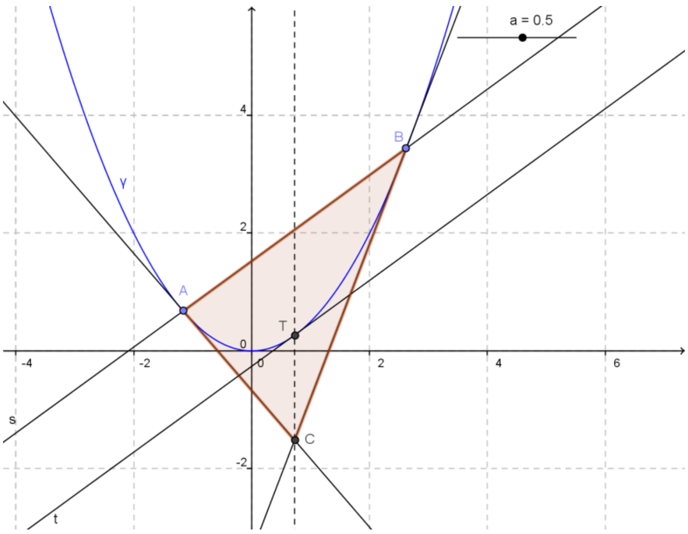

Figura 1

Osservazione_1

Una volta dimostrata la proprietà per la parabola $\gamma : y = ax^2$, la stessa sarà estensibile ad ogni parabola la cui equazione sia $\gamma' : y = ax^2 + bx + c$. Infatti, nel sistema di riferimento cartesiano xOy si può trasformare la parabola γ' nella corrispondente parabola γ'' avente il vertice nell'origine degli assi cartesiani, ottenuta sottoponendo la curva γ' alla traslazione che associa al vertice di γ' l'origine degli assi. La parabola γ'' avrà equazione $\gamma'' : y = ax^2$ e le sue proprietà metriche saranno le stesse di quelle della parabola γ', giacché la traslazione un'isometria(1).

***

Per dimostrare la proprietà indicata del segmento parabolico seguiremo il seguente percorso.

(1) Ricordiamo che **una trasformazione** (nel piano cartesiano in questo contesto) **è** definita **isometria** se trasforma una qualsiasi figura F in un'altra figura F′ congruente alla figura di partenza.

1) Determiniamo il coefficiente angolare della retta s=[A;B], quindi cercheremo l'equazione della retta t tangente alla parabola e parallela ad s.
2) Dopo aver trovato le coordinate del punto T di contatto tra la retta t e la parabola, calcoleremo l'altezza del segmento parabolico con la distanza di T da s. Determineremo la misura della corda AB (scopriremo l'importante proprietà che l'ascissa del punto T è uguale alla semisomma delle ascisse dei due punti A, B).
3) Applicando il teorema di Archimede troveremo il valore dell'area del segmento parabolico di base AB in funzione del parametro a e delle ascisse dei punti A, B.
4) Scriveremo le equazioni delle rette tangenti alla parabola nei punti A, B e determineremo le coordinate del loro punto di intersezione C.
5) Calcoleremo l'area del triangolo ABC sfruttando la formula del determinante del terzo ordine.
6) Faremo il confronto tra l'area del triangolo e quella del segmento parabolico.

Elaborazioni

1) …
2) Coordinate del punto di contatto T tra la retta t e la parabola
3) Area del segmento parabolico
4) Equazioni delle rette tangenti nei punti A e B
5) Area del triangolo ABC
6) Confronto dell'area del triangolo ABC con quella del segmento parabolico

***

Il teorema di Archimede con il calcolo integrale

Dimostrazione del teorema

Determiniamo l'area del segmento parabolico applicando la teoria degli integrali definiti.

…