# Parabole congruenti simmetriche e rettangoli inscritti

## Problema

Q1- Nel riferimento cartesiano ortogonale xOy scrivere l'equazione della parabola γ avente come asse di simmetria la retta s:y=2, passante per $P\left(\frac{3}{2};0\right)$ e che intercetta sull'asse y una corda AB di misura 6.

Q2- Scrivere l'equazione della parabola γ′ simmetrica di γ rispetto all'asse delle ordinate e determinare l'area della regione finita di piano F delimitata dalle due parabole. Rappresentare le due parabole.

Q3- Inscrivere nella regione F un rettangolo avente i lati paralleli agli assi coordinati il cui perimetro misuri 14. Riconosciuto che esistono due rettangoli aventi le proprietà indicate, determinare l'area di ciascuno di essi, nonché l'area della regione piana comune agli stessi.

Q4- Rappresentare gli elementi geometrici determinati.

## Soluzione

**Q1**- Poiché la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse, la sua equazione è del tipo $\gamma: x = ay^2 + by + c$. Per determinare i coefficienti *a*, *b*, *c*, imponiamo le seguenti condizioni:

1) poiché il vertice della parabola ha coordinate $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$, dovrà risultare $-\frac{b}{2a}=2$, quindi $b=-4a$;
2) imponiamo che le coordinate del punto P da cui passa la curva verifichino l'equazione della stessa; si ricava $c=\frac{3}{2}$.

A questo punto possiamo affermare che l'equazione della parabola sarà del tipo

$$\gamma: x = ay^2 - 4ay + \frac{3}{2} \qquad (*)$$

3) Per determinare il valore del parametro residuo troviamo i due punti A, B di intersezione della curva con l'asse delle ordinate ed imponiamo che la loro distanza misuri 6.

$$\begin{cases} \gamma: x = ay^2 - 4ay + \frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases},$$

da cui si ricava l'equazione $2ay^2 - 8ay + 3 = 0$, che ammette come radici

$y_1 = \frac{4a - \sqrt{16a^2 - 6a}}{2a}$, $y_2 = \frac{4a + \sqrt{16a^2 - 6a}}{2a}$; il parametro *a* deve verificare le condizioni

$(a \neq 0) \wedge (16a^2 - 6a \geq 0)$, che sviluppate diventano $(a<0) \vee \left(a \geq \frac{3}{8}\right)$.

I due punti cercati sono $A\left(0;\dfrac{4a-\sqrt{16a^2-6a}}{2a}\right)$, $B\left(0;\dfrac{4a+\sqrt{16a^2-6a}}{2a}\right)$, la cui distanza è

$$\overline{AB}=\left|\frac{4a+\sqrt{16a^2-6a}}{2a}-\frac{4a-\sqrt{16a^2-6a}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{16a^2-6a}}{|a|}$$

La condizione $\overline{AB}=6$ fornisce l'equazione irrazionale con modulo

$\dfrac{\sqrt{16a^2-6a}}{|a|}=6$, che, essendo $a\neq 0$, diventa $\sqrt{16a^2-6a}=6|a|$, da cui, quadrando e riducendo i termini simili, si ottiene $2a(10a+3)=0$; le radici sono $a_1=0$, $a_2=-\dfrac{3}{10}$. Poiché il valore zero non è accettabile, rimane il secondo valore.

Conclusione

La parabola cercata è $\gamma: x=-\dfrac{3}{10}y^2+\dfrac{6}{5}y+\dfrac{3}{2}$ (**)

**Q2**- L'equazione della parabola γ′ simmetrica di γ rispetto all'asse delle ordinate si ottiene da quella di γ sostituendo *x* con –*x*. Si ha

$\gamma': x=\dfrac{3}{10}y^2-\dfrac{6}{5}y-\dfrac{3}{2}$.

Vertici delle due parabole e punti A, B di intersezione con l'asse y

Vertice di γ: $V\left(\dfrac{27}{10};2\right)$;

vertice di γ′: $V'\left(-\dfrac{27}{10};2\right)$;

$A(0;-1)$; $B(0;5)$

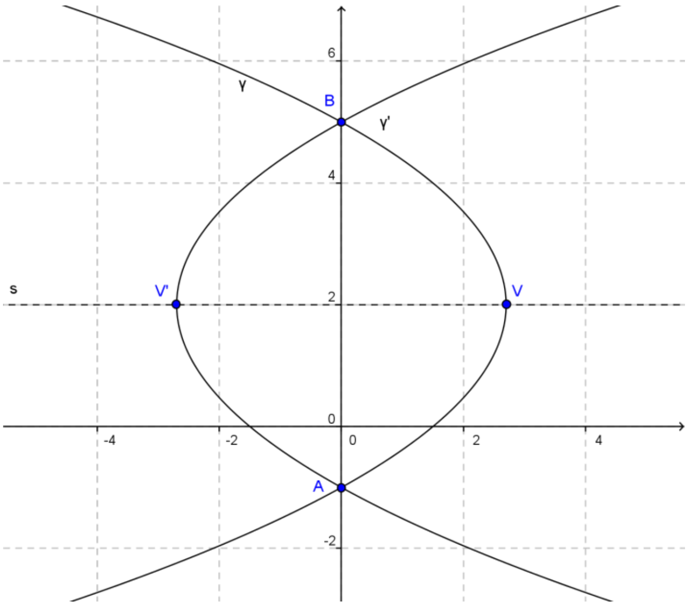

Figura 1-Le due parabole γ, γ′ sono l'una la simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e sono isometriche.

Area della regione finita di piano F delimitata dalle due parabole

La regione piana è l'unione di due segmenti parabolici di base AB, uno dei quali ha vertice in V e l'altro in V′. I due segmenti sono isometrici, quindi hanno la stessa area; il valore dell'area si ottiene applicando il teorema di Archimede.

$$Area(F)=2\cdot\frac{2}{3}\overline{AB}\cdot d(V;asse\_y)=\frac{4}{3}\cdot 6\cdot\frac{27}{10}=\frac{108}{5}$$

**Q3**- Facciamo riferimento alla Figura 2.

Consideriamo la retta $r$:$x$=$k$, con $0 \le k \le \frac{27}{10}$ e siano C e D i due punti in cui r taglia la parabola $\gamma$. Il segmento CD è uno dei lati del rettangolo inscritto da determinare; gli altri due vertici appartenenti alla parabola $\gamma'$ sono E ed F simmetrici rispettivamente di D e C rispetto all'asse y.

### Coordinate dei vertici C, D, E, F

Le coordinate dei vertici C e D si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r e $\gamma$.

$$\begin{cases} r: x = k \\ \gamma: x = -\frac{3}{10}y^2 + \frac{6}{5}y + \frac{3}{2} \end{cases}$$ , si ottiene

l'equazione risolvente

$3y^2 - 12y - 15 + 10k = 0$.

Con la condizione imposta $0 \le k \le \frac{27}{10}$,

le due radici dell'equazione sono reali e

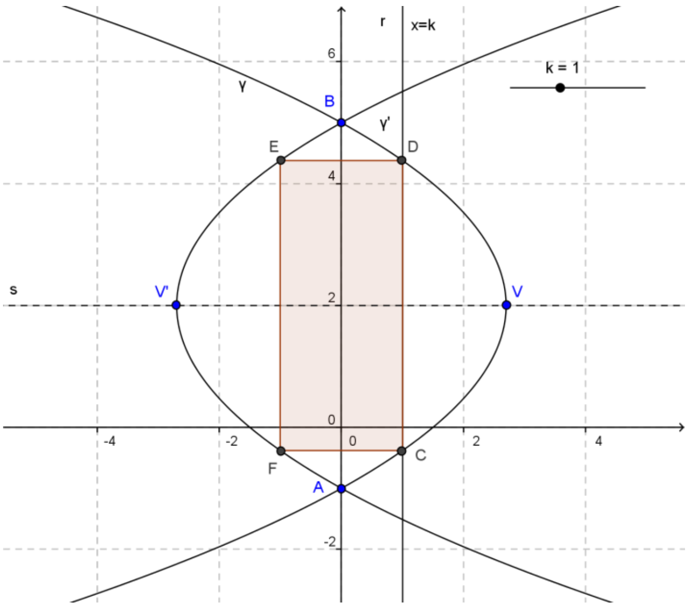


Figura 2

sono $y = \frac{6 \pm \sqrt{81-30k}}{3}$. Si hanno i due punti , $C\left(k; \frac{6-\sqrt{81-30k}}{3}\right)$, $D\left(k; \frac{6+\sqrt{81-30k}}{3}\right)$.

Gli altri due vertici del rettangolo, per la simmetria rispetto all'asse y, sono

$E\left(-k; \frac{6+\sqrt{81-30k}}{3}\right)$, $F\left(-k; \frac{6-\sqrt{81-30k}}{3}\right)$.

Le dimensioni del rettangolo CDEF sono $\overline{CD} = \frac{2\sqrt{81-30k}}{3}$, $\overline{DE} = 2k$, per cui il perimetro del rettangolo è

$$Per(CDEF) = 2\left(\overline{CD} + \overline{DE}\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{81-30k}}{3} + 2k\right) = 14,$$

da cui si perviene all'equazione irrazionale

$2\sqrt{81-30k} + 6k = 21$, equivalente all'equazione $2\sqrt{81-30k} = 21 - 6k$.

Osserviamo che deve essere soddisfatta la condizione $21 - 6k \ge 0$, cioè $k \le \frac{7}{2}$, affinché si possano elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione ed ottenere un'equazione equivalente. Poiché sappiamo che $k$ verifica la doppia disuguaglianza $0 \le k \le \frac{27}{10}$, per questi valori è senz'altro verificata la condizione $k \le \frac{7}{2}$. Elaborando l'equazione, dopo alcune semplificazioni, si perviene all'equazione

$12k^2 - 44k + 39 = 0$, che ammette come radici $k_1 = \frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{13}{6}$. Entrambi i valori appartengono al dominio di ricerca $\left[0; \frac{27}{10}\right]$, per cui si conclude che la retta $r$ può assumere due posizioni e che in definitiva esistono due rettangoli inscritti nella regione piana F aventi perimetro 14.

Vertici del primo rettangolo: $k = \frac{3}{2}$,

$C'\left(\frac{3}{2};0\right)$, $D'\left(\frac{3}{2};4\right)$, $E'\left(-\frac{3}{2};4\right)$, $F'\left(-\frac{3}{2};0\right)$

Vertici del secondo rettangolo: $k = \frac{13}{6}$,

$C''\left(\frac{13}{6};\frac{2}{3}\right)$, $D''\left(\frac{13}{6};\frac{10}{3}\right)$, $E''\left(-\frac{13}{6};\frac{10}{3}\right)$, $F''\left(-\frac{13}{6};\frac{2}{3}\right)$.

In Figura 3 Sono rappresentati le parabole e i due rettangoli (isoperimetrici) inscritti aventi perimetro 14 .

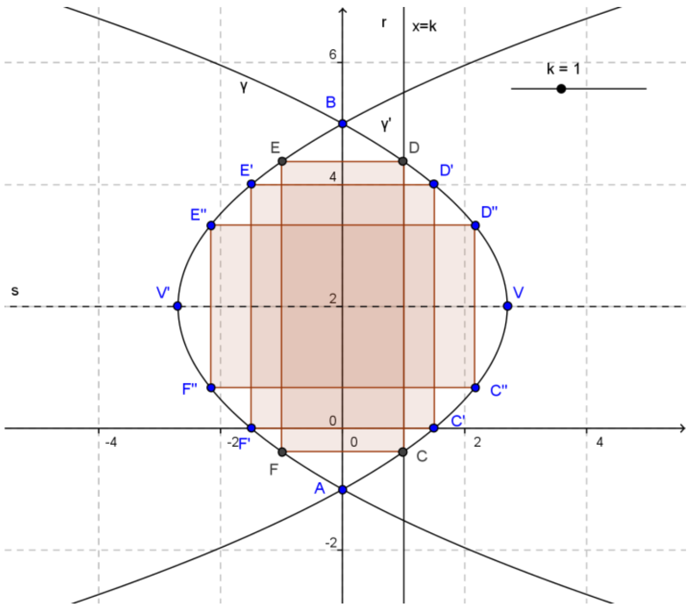

Figura 3

Area(C′D′E′F′)=3·4=12; Area(C″D″E″F″)=104/9.

Area della regione comune ai due rettangoli C′D′E′F′, C″D″E″F″

La regione piana è un rettangolo con i lati congruenti ai segmenti C′F′, C″D″, che misurano rispettivamente 3 e 8/3. Pertanto l'area della regione è 8.

**Q4**- Gli elementi geometrici elaborati sono rappresentati in Figura 3.