Geometria analitica della parabola e della retta

Due parabole tangenti-Segmenti parabolici

Problema

Q1- Considerate nel piano cartesiano xOy le equazioni delle due parabole λ_1:x^2-4y=0, λ_2:2x-y^2-3=0, riconoscere che sono tangenti e determinare le coordinate del punto T di tangenza. T(2;1)

Q2- Determinare le equazioni delle rette t_1, t_2 tangenti comuni alle due parabole; siano t_1 la tangente nel punto T, A e B i punti di contatto della tangente t_2 rispettivamente con λ_1 e λ_2 .

t_1:y=x-1; t_2:2x+4y+1=0; A(-1;1/4), B(7/2;-2).

Q3- Determinare l'area del triangolo ABT. [81/16]

Q4- Determinare le aree dei segmenti parabolici individuati dalla retta [A;T] con λ_1 e dalla retta [B;T] con λ_2. Calcolare l'area del triangolo mistilineo ABT delimitato dalle parabole λ_1 , λ_2 e dalla retta t_2. Verificare che la somma delle aree dei due segmenti parabolici è pari ai 2/3 dell'area del triangolo ABT.

Elaborazioni

Q1- Per riconoscere che le due parabole sono tangenti si affronta il sistema formato dalle loro equazioni e e riscontrare che questo ammette soluzioni coincidenti. Procediamo.

$\begin{cases} \lambda_1 : x^2 - 4y = 0 \\ \lambda_2 : 2x - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$, si tratta di un sistema di quarto grado che risolviamo con il metodo di sostituzione ricavando y dalla prima equazione e sostituendola nella seconda. Si ha:

$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ 2x - \dfrac{x^4}{16} - 3 = 0 \end{cases}$ Si deve risolvere l'equazione di quarto grado $x^4 - 32x + 48 = 0$. Notiamo che x=2 è zero del polinomio $P(x) = x^4 - 32x + 48$ per cui eseguiamo la divisione P(x):(x -2) per abbassare il grado dell'equazione. Il quoziente della divisione è $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 24$. Questo polinomio si annulla ancora per x=2, quindi si deve eseguire l'ulteriore divisione e $(x^3 + 2x^2 + 4x - 24) : (x - 2)$ e si ricava il quoziente $Q_2(x) = x^2 + 4x + 12$. In definitiva l'equazione di quarto grado di partenza si può scrivere nella forma $(x-2)^2 (x^2 + 4x + 12) = 0$, che ammette come **unica radice reale doppia x=2** ed altre due radici complesse (che nel nostro contesto non interessano). Le due parabole hanno pertanto il punto di ascissa x=2 e ordinata y=1 che è doppio e quindi sono tangenti nel punto T(2;1).

Q2- Equazioni delle rette tangenti comuni alle due parabole.

Una delle tangenti passa per il punto T. Avviamo la ricerca delle equazioni delle due tangenti comuni alle due parabole partendo dall'equazione della generica retta del piano cartesiano scritta in forma esplicita y=mz+q ed impostiamo i due sistemi ottenuti con essa e con l'equazione di ciascuna delle due

parabole, imponendo ogni volta la condizione per la tangenza che, com'è noto, consiste nell'annullamento del discriminante della relativa equazione risolvente.

Primo sistema $\begin{cases} y = mx+q \\ \lambda_1 : x^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 4(mx+q) = 0 \rightarrow x^2 - 4mx - 4q = 0$; la condizione di tangenza è

$$\frac{\Delta_1}{4} = 4m^2 + 4q = 0 \rightarrow m^2 + q = 0 \qquad (1)$$

Secondo sistema $\begin{cases} y = mx+q \\ \lambda_2 : 2x - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - (mx+q)^2 - 3 = 0 \rightarrow m^2x^2 + 2(mq-1)x + q^2 + 3 = 0$;

la condizione di tangenza è $\frac{\Delta_2}{4} = (mq-1)^2 - m^2(q^2+3) = 0 \rightarrow 3m^2 + 2mq - 1 = 0 \qquad (2)$

Per determinare i valori di *m* e *q* si deve risolvere il sistema algebrico formato dalle due equazioni (1) e (2). Si ha:

$\begin{cases} m^2 + q = 0 \\ 3m^2 + 2mq - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = -m^2 \\ 3m^2 - 2m^3 - 1 = 0 \end{cases}$; risolviamo l'equazione di terzo grado $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$.

Si riconosce subito che *m*=1 è una radice. Dividiamo perciò il polinomio al primo membro per (*m*-1) per abbassare il grado dell'equazione. Il quoziente della divisione $(2m^3 - 3m^2 + 1) : (m-1)$ è $2m^2 - m - 1$; quindi l'equazione si scrive nella forma seguente $(2m^2 - m - 1)(m-1) = 0$. Uguagliando a zero il residuo trinomio di secondo grado si trovano le altre due radici dell'equazione in esame:

$$2m^2 - m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} ;\ m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = 1 .$$

In definitiva, le radici dell'equazione di terzo grado sono *m*=1, doppia, ed *m*=-1/2 semplice; a detti valori corrispondono ordinatamente i due valori per il termine noto *q*: $q_1 = -1$, $q_2 = -\frac{1}{4}$ e quindi le equazioni delle due rette tangenti comuni alle due parabole sono:

$$t_1 : y = x - 1 ; \qquad t_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} .$$

Si riconosce che l'equazione della tangente t_1 è soddisfatta dalla coppia ordinata (2;1), dunque è quella che passa per il **punto T(2;1) in cui le due parabole sono tangenti**.

Occorre ora determinare le *coordinate dei due punti A e B in cui la retta tangente* t_2 *tocca le due parabole*. Per questo è necessario risolvere due sistemi di equazioni:

Primo sistema

$$t_2 \cap \lambda_1 : \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \lambda_1 : x^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 4\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1 ;\ y = -\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} ;$$

il punto di contatto è $A=\left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

Secondo sistema

$$t_2 \cap \lambda_2 : \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \lambda_2 : 2x-y^2-3=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \lambda_2 : x=\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4} \rightarrow$$

$y^2+4y+4=0 \rightarrow (y+2)^2=0 \rightarrow y=-2$; dunque $x=\frac{7}{2}$. Il punto di contatto di t_2 e λ_2 è $B\left(\frac{7}{2};-2\right)$.

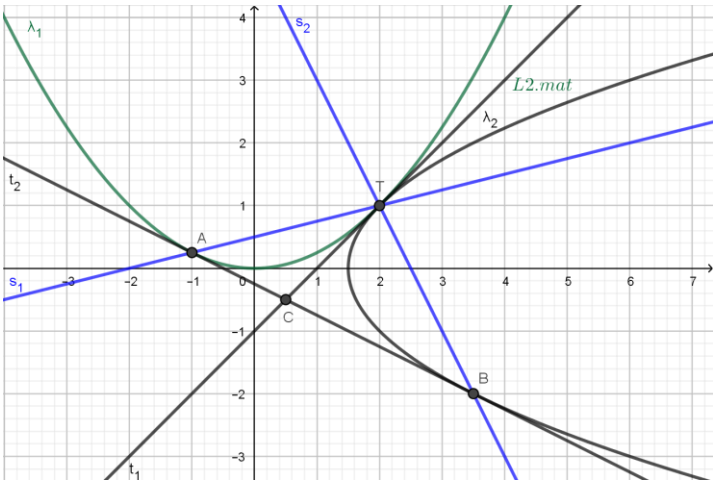

Figura 1- Parabole tangenti nel punto T(2;1) e rette tangenti comuni alle due parabole.

In Figura 1 sono rappresentati tutti gli elementi geometrici elaborati nei primi due quesiti.

Q3- Area del triangolo ABT. Utilizziamo la regola del determinate del terzo ordine. *Nell'impostazione del determinante avremo cura di riportare le coordinate dei tre vertici prendendo gli stessi nell'ordine antiorario; con questo accorgimento si può evitare di inserire nella formula per l'area il valore assoluto per il determinante*. Si ha:

$$Area(ABT)=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{7}{2} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(2+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)-\left(-4-1+\frac{7}{8}\right)\right]=\frac{81}{16}$$

Q4

Q4.1- Segmento parabolico formato dalla retta [A;T] con λ_1

Occorre la misura della base AT del segmento parabolico e della sua altezza *h*.

$$\overline{AT}=\sqrt{(2+1)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}$$

Per l'altezza del segmento parabolico si deve determinare l'equazione della retta *t'* tangente alla parabola che risulta parallela alla corda AT e trovare il punto T' in cui detta retta tocca la parabola λ_1 ; l'altezza *h* del segmento è data dalla distanza del punto T' dalla retta [A;T].

Ricerca della retta *t'*

Scriviamo l'equazione della retta [A;T]

$[A;T]: \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \rightarrow [A;T]: x-4y+2=0$; il coefficiente angolare di questa retta è *m*=1/4.

La retta *t*' avrà equazione del tipo $t': y = \frac{1}{4}x+q$. Mettiamo a sistema quest'equazione con l'equazione di λ_1 ed imponiamo la condizione di tangenza per trovare il valore dell'incognita *q*.

$\begin{cases} t': y = \frac{1}{4}x+q \\ \lambda_1: x^2-4y=0 \end{cases} \rightarrow x^2-4\left(\frac{1}{4}x+q\right)=0 \rightarrow x^2-x-4q=0$; la condizione di tangenza è $\Delta = 1+16q=0$, da cui $q=-\frac{1}{16}$; pertanto l'equazione della retta è $t': y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}$.

Osserviamo ora che l'ascissa del punto di contatto T' è il valore comune delle radici dell'equazione risolvente $x^2-x-4q=0$, quindi $x_{T'}=\frac{1}{2}$; la corrispondente ordinata si può determinare per sostituzione nell'equazione della parabola o nell'equazione della retta *t*'; si ricava $y_{T'}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$.

$T'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{16}\right)$.

Calcolo dell'altezza del segmento parabolico

$$h = d\left(T';[A;T]\right) = \frac{\left|\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{16}+2\right|}{\sqrt{1+(-4)^2}} = \frac{9}{4\sqrt{17}}$$

Calcoliamo ora l'area del segmento parabolico in oggetto:

$$S_1 = Area\left(Seg_P_1\right) = \frac{2}{3}\cdot\overline{AT}\cdot h = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{9}{4\sqrt{17}} = \frac{9}{8}$$

Q4.2- Segmento parabolico formato dalla retta [B;T] con λ_2

Misura della corda BT$\rightarrow \overline{BT} = \sqrt{\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$;

Equazione della retta $[B;T]: y=-2x+5$;

Ricerca della retta tangente a λ_2 parallela alla retta [B;T]

L'equazione è del tipo *y*=-2*x*+*q*; mettiamo a sistema quest'equazione con l'equazione di λ_2 e imponiamo la condizione di tangenza:

$\begin{cases} t'': y=-2x+q \\ \lambda_2: 2x-y^2-3=0 \end{cases} \rightarrow 2x-(-2x+q)^2-3=0 \rightarrow 4x^2-2(1+2q)x+q^2+3=0 \rightarrow$

$\frac{\Delta}{4} = (1+2q)^2-4q^2-12=0 \rightarrow q=\frac{11}{4}$;

la retta tangente ha equazione $t'': y=-2x+\frac{11}{4}$; Il punto di contatto è $T''\left(\frac{13}{8};-\frac{1}{2}\right)$.

Distanza h_2 di T'' dalla retta [B;T]:

$$h_2 = d\left(T'';[B;T]\right) = \frac{\left|2\cdot\frac{13}{8}-\frac{1}{2}-5\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

Area del segmento Parabolico

$$S_2 = Area\left(Seg_P_2\right) = \frac{2}{3}\cdot\overline{BT}\cdot h_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{9}{4\sqrt{5}} = \frac{9}{4}$$

Q.4.3- Area del triangolo mistilineo ABT

L'area del triangolo in oggetto è data dalla differenza tra l'area del triangolo ABT e la somma delle aree dei due segmenti parabolici. Risulta:

$$Area\left(ABT_{mistilineo}\right) = Area\left(ABT\right)-\left(S_1+S_2\right) = \frac{81}{16}-\left(\frac{9}{8}+\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{16}$$

Q.4.4- Confronto tra la somma delle aree dei due segmenti parabolici e l'area del triangolo ABT

Somma delle aree dei due segmenti parabolici: $S_1+S_2 = \frac{9}{8}+\frac{9}{4} = \frac{27}{8}$

Il rapporto richiesto è:

$$\frac{S_1+S_2}{Area\left(ABT\right)} = \frac{27}{8}:\frac{81}{16} = \frac{2}{3}$$

Nota teorica sul segmento parabolico

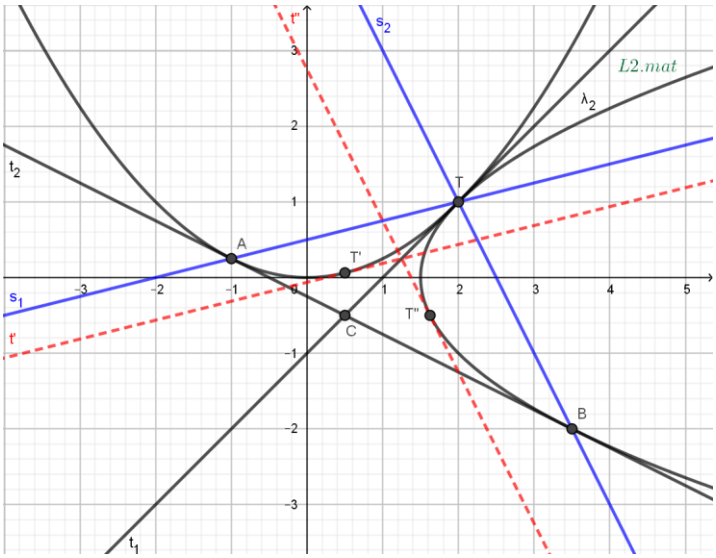

Figura 2

Il risultato ottenuto per il rapporto tra la somma delle aree dei due segmenti parabolici e l'area del triangolo ABT dipende da una *proprietà dell'area del segmento parabolico*. Precisamente, considerando una qualsiasi parabola λ ed una retta s secante la stessa, detti A e B i due punti di intersezione di λ con s, se si considerano le rette tangenti alla parabola λ nei punti A e B e si determina il loro punto C di intersezione, allora si dimostra che l'area del segmento parabolico formato dalla parabola e dalla retta s è pari ai 2/3 dell'area del triangolo ABC[(1)].

[(1)] Il lettore interessato alla dimostrazione della suddetta proprietà del segmento parabolico può consultare il documento presente in rete Proprietà del segmento parabolico sul sito www.matematicaescuola.it.

Tenendo conto della suddetta proprietà del segmento parabolico, in riferimento alla Figura 2, si noti la presenza del punto C di intersezione tra le due rette tangenti comuni alle due parabole. Poiché per la su citata proprietà del segmento parabolico sono vere le due seguenti uguaglianze

$$S_1 = Area\left(Seg_P_1\right) = \frac{2}{3} Area\left(ACT\right),$$

$$S_2 = Area\left(Seg_P_2\right) = \frac{2}{3} Area\left(BCT\right),$$

sommandole membro a membro si ottiene l'uguaglianza numerica

$$S_1 + S_2 = \frac{2}{3}\left[Area\left(ACT\right) + Area\left(BCT\right)\right] = \frac{2}{3} Area\left(ABT\right)$$

che esprime in forma diversa il rapporto tra la somma delle aree dei due segmenti parabolici e l'area del triangolo ABT.