Sulla parabola e il segmento parabolico[1]

Tema d'Esame di Liceo Scientifico proposto a studenti della terza classe

Problema

Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per i punti P(0;3), Q(2;3) e il cui vertice V sia sulla parabola β di equazione $y=-x^2+3x$.

Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole.

Risposte: $\alpha: y=x^2-2x+3$, $y=x+\frac{3}{4}$, $y=x+1$, Area=7/24

Elaborazioni

Risoluzione del problema per gli studenti della terza classe del Liceo

1. Sia xOy un riferimento cartesiano ortogonale nel piano.
2. L'equazione della parabola α è del tipo $\alpha: y=ax^2+bx+c$. Imponiamo che la curva passi per i punti P(0;3), Q(2;3).
   a. $P(0;3)\in\alpha \to c=3$; (2.1)
   b. $Q(2;3)\in\alpha \to 4a+2b+c=3$, e dalla (2.1) si ricava $b=-2a$.
   c. L'equazione della curva assume la seguente forma $\alpha: y=ax^2-2ax+3$. (2.2)
3. Per determinare il valore del parametro residuo a determiniamo ora le coordinate del vertice V della generica parabola (2.2)[2] e, poiché detto vertice deve appartenere alla parabola $\beta: y=-x^2+3x$, imponiamo che dette coordinate verifichino quest'ultima equazione.
   a. Ricordiamo che le coordinate il vertice V di ogni parabola la cui equazione sia della forma $y=ax^2+bx+c$ è il punto $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$; nel caso specifico l'ascissa è $x_V=-\frac{-2a}{2a}=1$ e l'ordinata si può determinare ponendo nella (2.2) x=1; si ha: $y_V=3-a$. V(1;3-a).
   b. V(1;3-a)$\in\beta \Leftrightarrow 3-a=-1+3$, da cui $a=1$.
   c. L'equazione della parabola cercata è $\alpha: y=x^2-2x+3$ (2.3)
   Il vertice di α è V(1;2).
4. Determinazione delle coordinate del punto W. Troviamo le coordinate dei punti comuni alle due parabole α,β
   a. Risolviamo il sistema formato con le equazioni delle due curve $\alpha\cap\beta: \begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=-x^2+3x \end{cases}$. Le soluzioni sono: ($x$=1;$y$=2), che sono le coordinate del vertice V di α, (x=3/2;y=9/4), che sono le coordinate del secondo punto W.

[1] Problema assegnato nell'Esame di Stato di Liceo Scientifico nel 1980, sessione suppletiva.
[2] L'equazione (2.2) rappresenta un fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate ed avente come punti base i punti P, Q.

Osservazione - Il punto W è il vertice della parabola β. Le due parabole sono tali che ciascuna passa per il vertice dell'altra, inoltre le equazioni delle stesse hanno uguali in modulo i coefficienti del termine di secondo grado; questa proprietà algebrica implica che **le due parabole sono isometriche**[(3)]. Questa proprietà geometrica potrà essere sfruttata in seguito.

5. Equazione della retta tangente t_W ad α
   a. L'equazione della retta tangente cercata è del tipo:
   $$y - y_W = m(x - x_W) \rightarrow y - \frac{9}{4} = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \qquad (5.1).$$
   b. Mettiamo a sistema l'equazione (5.1) con l'equazione di α ed imponiamo che l'equazione risolvente abbia il discriminante nullo (Δ=0); ciò equivarrà a richiedere che la retta e la parabola siano tangenti in W.
   $$\begin{cases} t_W : y - \frac{9}{4} = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ \alpha : y = x^2 - 2x + 3 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{9}{4} + m\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow 4x^2 - 4(2+m)x + 6m + 3 = 0 \rightarrow$$
   $$\frac{\Delta}{4} = 4(2+m)^2 - 4(6m+3) = 0 \rightarrow$$
   $$m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1.$$
   L'equazione della retta tangente è
   $$t_W : y = x + \frac{3}{4}.$$
   c. L'equazione della retta t_V tangente alla parabola β nel punto V(1;2) si determina con procedimento analogo a quello seguito per determinare l'equazione della retta tangente t_W ad α. Riportiamo di seguito l'equazione della retta lasciando al lettore il compito di eseguire i relativi calcoli. Risulta t_V:y=x+1.

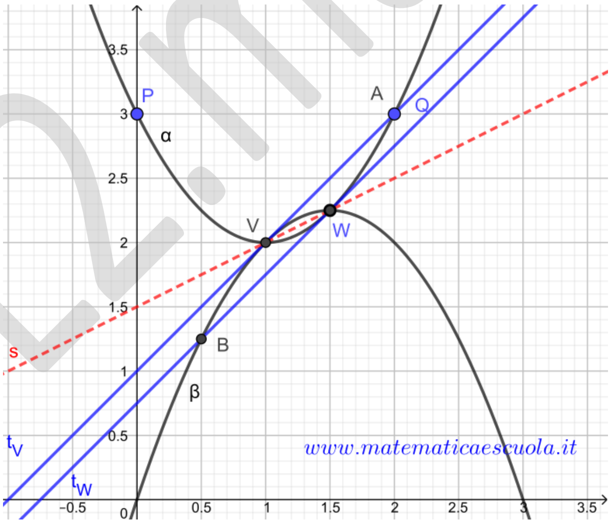

Figura 1

6. **Calcolo dell'area del trapezio mistilineo indicato nel testo**
   a. E' necessario determinare l'ulteriore punto A comune tra la retta t_V e la parabola α e il secondo punto B comune tra la retta t_W e la parabola β; a tale scopo si risolvono i corrispondenti sistemi di secondo grado composti con l'equazione della retta e la relativa parabola.
   $$\begin{cases} t_V : y = x + 1 \\ \alpha : y = x^2 - 2x + 3 \end{cases} \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$
   Il secondo punto comune tra la retta t_V e parabola α è A(2;3). Si noti che il punto A coincide con il punto Q indicato nel testo del problema.
   $$\begin{cases} t_W : y = x + \frac{3}{4} \\ \beta : y = -x^2 + 3x \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}.$$
   Il secondo punto comune tra la retta t_W e la parabola β è B(3/2;5/2).

[(3)] Infatti è possibile dimostrare che esiste una trasformazione del piano in se stesso che è una isometria nella quale una parabola è la trasformata dell'altra.

b. Osserviamo che la regione Σ finita di piano delimitata dalle parabole e dalle due rette t_V, t_W ha come contorno la linea formata dal segmento AV, dall'arco di estremi V e B della parabola β, dal segmento BW e dall'arco della parabola α avente estremi W ed A. Se facciamo riferimento al segmento parabolico individuato dalla retta t_V con α e al segmento parabolico individuato dalla retta t_W con β , si nota che la figura piana Σ è formata dall'unione dei due predetti segmenti parabolici che sono parzialmente sovrapposti. Ebbene, si può riconoscere che **in virtù dell'isometria tra le due parabole richiamata nella precedente osservazione** i due suddetti segmenti parabolici sono anch'essi isometrici, inoltre la retta s congiungente i vertici delle due parabole divide la parte comune ai due segmenti parabolici in altri due segmenti parabolici S', S'' equiestesi: $\mathcal{A}$(S')= $\mathcal{A}$(S'').

c. **Area di un segmento parabolico** - L'area di un segmento parabolico delimitato da una parabola λ e da una retta s secante la parabola stessa è pari ai due terzi dell'area del rettangolo avente per base la corda AB staccata dalla parabola sulla retta *s* e per altezza la distanza massima dei punti dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ della parabola dalla retta s.
In riferimento alla Figura 2, il segmento parabolico individuato dalla retta s e dalla parabola λ, avente base AB, come altezza il segmento TH$\perp$s , dove T è il punto di contatto tra la parabola λ e la retta t tangente alla parabola parallela alla retta s, ha area $Area=\frac{2}{3}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{HT}$.

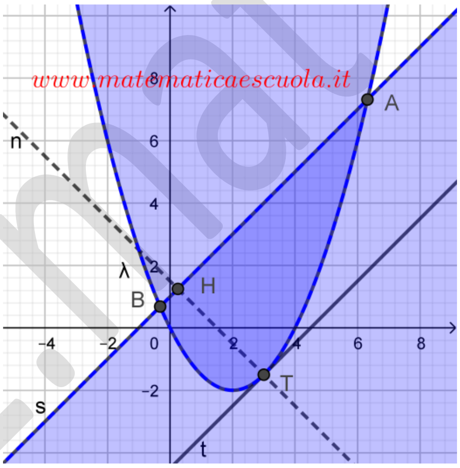

Figura 2- Figura di riferimento per illustrare come procedere per il calcolo dell'area di un segmento parabolico.

d. Determiniamo ora l'area del segmento parabolico definito dalla retta t_V e dalla parabola α (Fig.1).
Troviamo la misura della corda VA e la distanza del punto W dalla retta t_V.

$$\overline{VA}=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}\ , \qquad d(W;t_V)=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$Area(Seg_P)=\frac{2}{3}\cdot\overline{VA}\cdot d(W;t_V)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{6}$$

e. Calcoliamo ora l'area del segmento parabolico S' determinato dalla parabola α e dalla retta s congiungente i vertici V, W delle due parabole. La retta s ha equazione s:x-2y+3=0. Si deve ora trovare l'equazione della retta s' parallela ad s e tangente alla parabola α perché la distanza tra le due rette s, s' rappresenta l'altezza del segmento parabolico.
Il fascio F(s) improprio di rette individuato dalla retta s ha equazione F(s):x-2y+k=0, con $k\in$R. Mettendo a sistema l'equazione di questo fascio con quella della parabola α e annullando il discriminante della relativa equazione risolvente (questa è la condizione di tangenza tra s' e α) si ottiene un'equazione dalla quale si determina il valore reale di k corrispondente all'equazione della retta s'.

$$\begin{cases} \mathrm{F}(s): x-2y+k=0 \\ \alpha: y=x^2-2x+3 \end{cases} \rightarrow 2x^2-5x+6-k=0 \rightarrow \Delta=25-8(6-k)=0 \rightarrow k=\frac{23}{8} \rightarrow s':8x-16y+23=0$$

Troviamo ora la distanza tra le rette s, s' utilizzando la formula per il calcolo della distanza di punto da una retta, scegliendo di determinare la distanza del vertice V(1;2) di α dalla retta s'.

$$d(V;s')=\frac{|8\cdot 1-16\cdot 2+23|}{\sqrt{8^2+16^2}}=\frac{1}{8\sqrt{5}}$$

La base VW del segmento parabolico in oggetto misura

$$\overline{VW}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{9}{4}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Concludiamo che l'area del segmento parabolico S' è

$$\mathcal{A}(S')=\frac{2}{3}\cdot\overline{VW}\cdot d(V;s')=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{8\sqrt{5}}=\frac{1}{48}$$

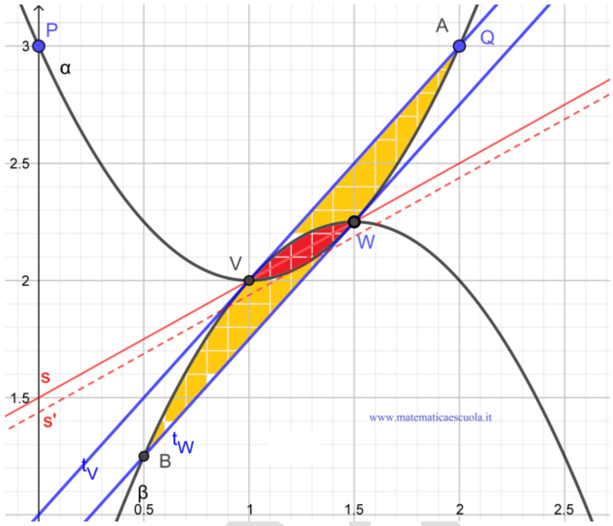

Figura 3

f. **Verso la conclusione** - Possiamo finalmente determinare l'area del trapezio mistilineo in virtù di quanto esposto e dei risultati numerici acquisiti. Risulta:

Area(Trap._mist.)=2·Area(Seg_P)-2· $\mathcal{A}$(S')$=2\cdot\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{48}=\frac{7}{24}$