Trasformazioni nel piano cartesiano

(Simmetria centrale e traslazione)

Considerata la funzione $y = f(x) = \dfrac{3-x}{2x+2}$, con x variabile reale, risolvere i quesiti che seguono in un sistema di riferimento cartesiano xOy.

1.1 Determinare il dominio e precisare per quali valori della variabile risulta $f(x)>0$.

1.2 Dimostrare analiticamente che la curva γ, diagramma della funzione, ammette un centro di simmetria C e determinarne le coordinate.

1.3 Scrivere l'equazione della curva γ' che si ottiene da γ sottoponendola alla traslazione determinata dal vettore $\overrightarrow{OC}$, essendo O l'origine del riferimento cartesiano. Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano le curve γ e γ'.

Soluzione

1.1 La funzione assegnata è razionale fratta ed è definita in $\mathbb{R}-\{-1\}$. Per rispondere al quesito posto occorre risolvere la disequazione
$\dfrac{3-x}{2x+2}>0$, che è soddisfatta nell'intervallo]-1;3[.

1.2 Precisiamo subito che la funzione assegnata ha come diagramma un'iperbole equilatera i cui asintoti sono paralleli agli assi coordinati ed hanno equazioni s_1:x=-1, $s_2: y=-\dfrac{1}{2}$; pertanto il centro di simmetria della curva γ è il punto $C\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. Tuttavia, il quesito chiede espressamente di dimostrare analiticamente che il diagramma della funzione ammette un centro di simmetria. Supponiamo dunque che sia il punto $C(x_C;y_C)$ il centro di simmetria, scriviamo le equazioni della simmetria centrale di centro C ed imponiamo che l'equazione della curva trasformata nella simmetria stessa coincida con l'equazione di partenza in modo da determinare le coordinate del centro di simmetria.

$$\sigma_C:\begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases} \qquad \text{(equazioni della simmetria centrale)}$$

L'equazione della curva trasformata è

$$2y_C - y = \frac{3-(2x_C-x)}{2(2x_C-x)+2} \Leftrightarrow y = \frac{(4y_C+1)x - 8x_Cy_C - 4y_C + 2x_C - 3}{2x-2-4x_C}$$

Imponendo che l'espressione ottenuta coincida con quella della funzione assegnata si evince che devono sussistere le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} 4y_C+1=-1 \\ -2-4x_C=2 \\ -8x_Cy_C-4y_C+2x_C-3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_C=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{C.V.D.}$$

1.3 Il vettore $\overrightarrow{OC}$ determina la traslazione τ di equazioni

$$\tau:\begin{cases} x' = x+V_x = x-1 \\ y' = y+V_y = y-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione della curva γ' trasformata della curva γ nella traslazione occorre utilizzare le espressioni delle coordinate (x;y) in funzione delle coordinate (x′;y′). Poiché risulta

$$\tau^{-1}:\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

l'equazione di γ′ è

$\gamma' : y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-(x+1)}{2(x+1)+2}$ che semplificata diventa

$\gamma' : y=-\dfrac{x}{x+2}$.

Le curve γ e γ′ con i rispettivi asintoti sono rappresentate nella figura a lato.