Sulla circonferenza

Fascio di circonferenze tangenti

Considerato il fascio di circonferenze avente equazione $F: x^2+y^2-(k+2)x+(k-2)y+2=0$ risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le generatrici del fascio e classificarlo.

Q2- Verificare che esistono due circonferenze del fascio che delimitano cerchi aventi area 8.

Q3- Determinare le equazioni delle circonferenze del fascio tangenti all'asse delle ascisse.

Q4- Determinare l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta s:y=2x-5.

Q5- Trovare le curve del fascio che risultano tangenti alla retta t:y=x-4.

Soluzione

Q1- Scrivendo l'equazione del fascio in modo da separare i termini contenenti il parametro k dagli altri

$$F: x^2+y^2-2x-2y+2+k(y-x)=0$$

si deducono immediatamente le equazioni delle due curve generatrici del fascio che sono

$$\lambda_0: x^2+y^2-2x-2y+2=0; \qquad r: y=x$$

Si riconosce che λ_0 è una circonferenza degenere, infatti ha raggio nullo e si riduce al suo centro che è il punto $O_0(1;1)$. La retta r è la bisettrice del primo e terzo quadrante e poiché passa dal centro della circonferenza λ_0 si deduce che **il fascio è composto da circonferenze tangenti nel punto $O_0(1;1)$** e la retta r:y=x è la tangente comune.

Q2- Troviamo la misura del raggio R della generica circonferenza del fascio e imponiamo che sia soddisfatta la condizione $\pi R^2=8\pi$, cioè, $R^2=8$.

$$R^2=\left(\frac{k+2}{2}\right)^2+\left(\frac{k-2}{2}\right)^2-2=8\rightarrow\ k^2=16\rightarrow k=\pm 4$$

Nel fascio esistono due circonferenze che hanno la proprietà richiesta e sono:

$$\lambda_1: x^2+y^2-6x+2y+2=0, \qquad \lambda_2: x^2+y^2+2x-6y+2=0.$$

Q3-Per ottenere la condizione algebrica cui deve soddisfare il parametro k affinché le circonferenze corrispondenti siano tangenti all'asse delle ascisse, basta mettere a sistema l'equazione del fascio con l'equazione dell'asse delle ascisse che è y=0 ed imporre che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo.

$$\begin{cases} x^2+y^2-(k+2)x+(k-2)y+2=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x^2-(k+2)x+2=0\rightarrow \Delta=(k+2)^2-8=0\rightarrow$$

$k=-2\pm 2\sqrt{2}$. Esistono due circonferenze del fascio che sono tangenti all'asse x e sono:

$C_1: x^2+y^2-2\sqrt{2}x+2(\sqrt{2}-2)y+2=0, \quad C_2: x^2+y^2+2\sqrt{2}x-2(\sqrt{2}+2)y+2=0.$

Q4- Per risolvere il quesito basta scrivere le coordinate del centro della generica circonferenza del fascio ed imporre che verifichino l'equazione della retta s:y=2x-5.

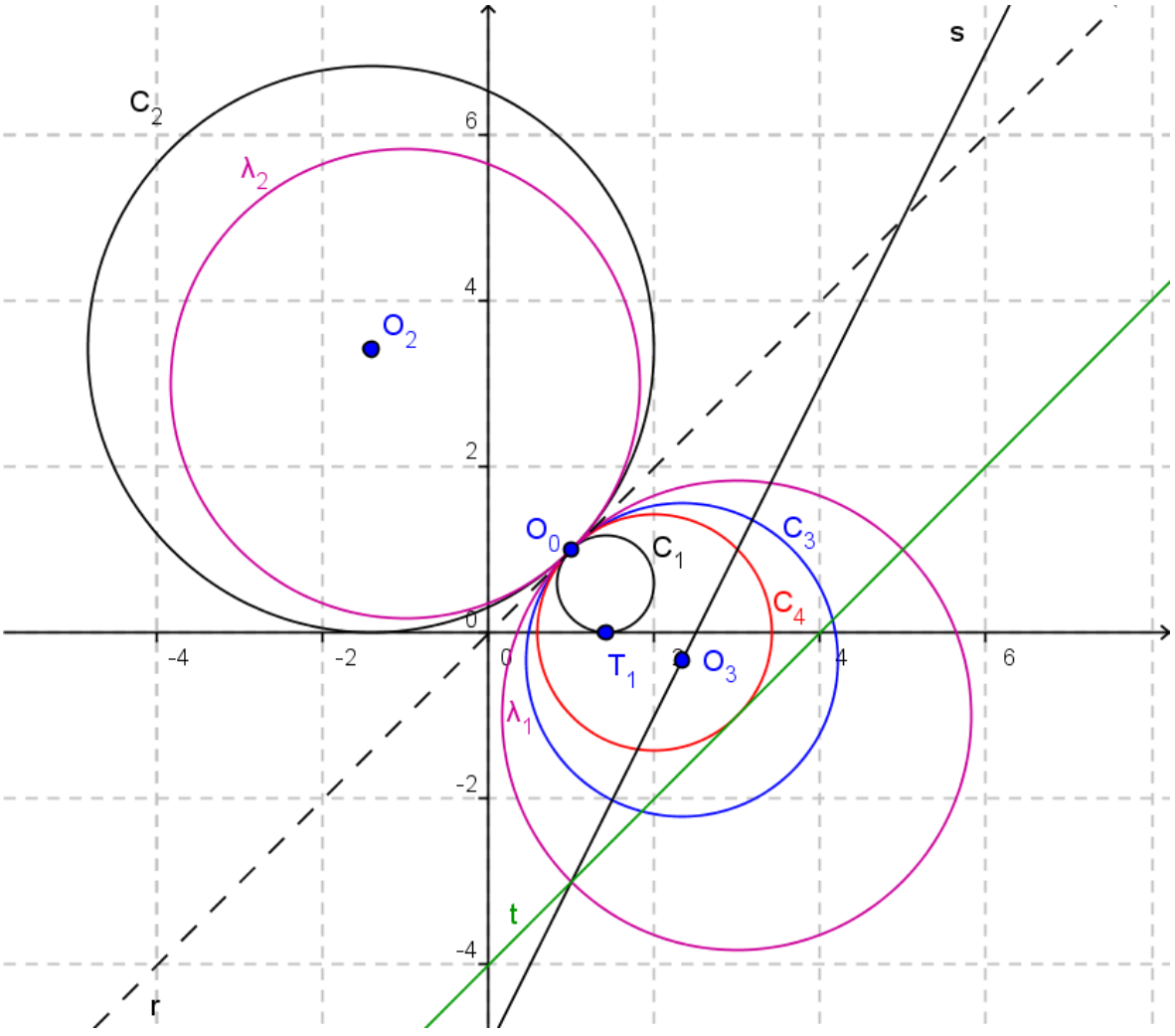
$$\Omega\left(\frac{k+2}{2};\frac{k-2}{2}\right)\in s\rightarrow \frac{k-2}{2}=2\left(\frac{k+2}{2}\right)-5\rightarrow k=\frac{8}{3}.$$

Concludiamo che esiste una sola circonferenza del fascio avente centro sulla retta s ed è

$$C_3: x^2+y^2-\frac{14}{3}x+\frac{2}{3}y+2=0.$$

Q5-Per trovare le curve del fascio tangenti alla retta t:y=x-4 si procede nello stesso modo seguito per trovare le curve tangenti all'asse delle ascisse: si imposta il sistema formato con l'equazione del fascio e quella della retta, si trova l'equazione risolvente e si impone che questa abbia discriminante nullo.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che esiste una sola circonferenza che ha la proprietà richiesta e che si ottiene per k=2; l'equazione della circonferenza è

$$C_4: x^2+y^2-4x+2=0.$$

Nella figura seguente sono rappresentati tutti gli elementi geometrici relativi alle elaborazioni sviluppate.