

Geometria analitica

Problema di riepilogo su retta, parabola e circonferenza

Sia fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale xOy .

- 1) Determinare l'equazione della parabola γ della forma $y = ax^2 + bx + c$ tangente alla retta $t: x+y-2=0$ nel suo punto A di ascissa $x=-1$ e passante per il punto B(1;0). Determinare le coordinate del vertice V della parabola.
- 2) Determinare l'equazione della circonferenza λ tangente a γ in A ed avente il centro C sull'asse di simmetria di γ .
- 3) Dimostrare che la circonferenza ha in comune con la parabola un altro punto A', dove le curve sono ancora tangenti.
- 4) Classificare il triangolo AA'C e determinarne perimetro ed area.
- 5) Rappresentare nel piano cartesiano tutti gli elementi geometrici elaborati.

Soluzione

- 1) La parabola appartiene al fascio di parabole avente come curve basi la retta $x+1=0$ contata due volte e la retta t tangente in A (entrambe le curve basi sono degeneri). L'equazione di detto fascio si può scrivere nella forma

$$F : k(x+1)^2 + x + y - 2 = 0, \quad k \in R. \quad (1.1)$$

...

- 2) L'asse di simmetria della parabola è la retta $a: x=-3$. La circonferenza λ ha come centro il punto C di intersezione tra la normale⁽¹⁾ n alla parabola in A e l'asse di simmetria a ...
- 3) La parabola è simmetrica rispetto alla retta $a: x=-3$, ma questa retta è anche un diametro della circonferenza λ , quindi anche quest'ultima è simmetrica rispetto alla stessa retta, ...

Coordinate di A'

...

Risoluzione del sistema

$$\begin{cases} \gamma : y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \\ \lambda : (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \quad (3.1)$$

Sostituendo il valore di y ricavato dalla prima equazione nella seconda ed elaborando l'espressione algebrica si perviene all'equazione di quarto grado ...

⁽¹⁾ Ricordiamo che la normale alla parabola nel punto A è la retta perpendicolare alla retta tangente t alla curva nello stesso punto.

4) Classificazione del triangolo AA'C, perimetro e area

Il triangolo è intanto isoscele perché $CA \cong CA'$, in quanto raggi della stessa circonferenza.
Vogliamo provare che è anche rettangolo in C e per questo utilizziamo i coefficienti angolari

...

Segue la figura completa di tutti gli elementi geometrici elaborati.

...