Geometria analitica

Problema di riepilogo su retta, parabola e circonferenza

Sia fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale xOy.

1) Determinare l'equazione della parabola γ della forma $y = ax^2 + bx + c$ tangente alla retta t:x+y-2=0 nel suo punto A di ascissa x=-1 e passante per il punto B(1;0). Determinare le coordinate del vertice V della parabola.
2) Determinare l'equazione della circonferenza λ tangente a γ in A ed avente il centro C sull'asse di simmetria di γ.
3) Dimostrare che la circonferenza ha in comune con la parabola un altro punto A′, dove le curve sono ancora tangenti.
4) Classificare il triangolo AA′C e determinarne perimetro ed area.
5) Rappresentare nel piano cartesiano tutti gli elementi geometrici elaborati.

Soluzione

1) La parabola appartiene al fascio di parabole avente come curve basi la retta x+1=0 contata due volte e la retta t tangente in A (entrambe le curve basi sono degeneri). L'equazione di detto fascio si può scrivere nella forma

$$F: k(x+1)^2 + x + y - 2 = 0,\ k \in R. \tag{1.1}$$

e l'equazione della parabola richiesta si individua determinando il corrispondente valore del parametro k, che si trova richiedendo che l'equazione (1.1) sia soddisfatta dalle coordinate del punto B(1;0).

$B(1;0) \in \gamma$ se e solo se risulta $k(1+1)^2 + 1 + 0 - 2 = 0$, da cui $k = \frac{1}{4}$.

L'equazione della parabola γ è

$\gamma: \frac{1}{4}(x+1)^2 + x + y - 2 = 0$, che ridotta alla forma normale diventa

$$\gamma: y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \tag{1.2}$$

Il vertice V della parabola, in riferimento alla forma standard $y = ax^2 + bx + c$, ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, essendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Risulta V(-3;4).

2) L'asse di simmetria della parabola è la retta a:x=-3. La circonferenza λ ha come centro il punto C di intersezione tra la normale[1] n alla parabola in A e l'asse di simmetria a. La normale n ha equazione

$n: y - y_A = m'(x - x_A)$, essendo $m' = -\dfrac{1}{m(t)} = 1$. Dunque $n: y = x + 4$.

Coordinate del centro C

Si risolve il sistema $\begin{cases} n: y = x + 4 \\ a: x + 3 = 0 \end{cases}$, da cui $C(-3;1)$.

Osserviamo ora che la circonferenza ha come raggio il segmento CA la cui misura è

$$\overline{CA} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

L'equazione della circonferenza si ottiene dal modello $\lambda: (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, essendo $C(x_C; y_C)$ il centro ed r la misura del raggio. Dunque

$\lambda: (x+3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$,

che diventa

$\lambda: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$.

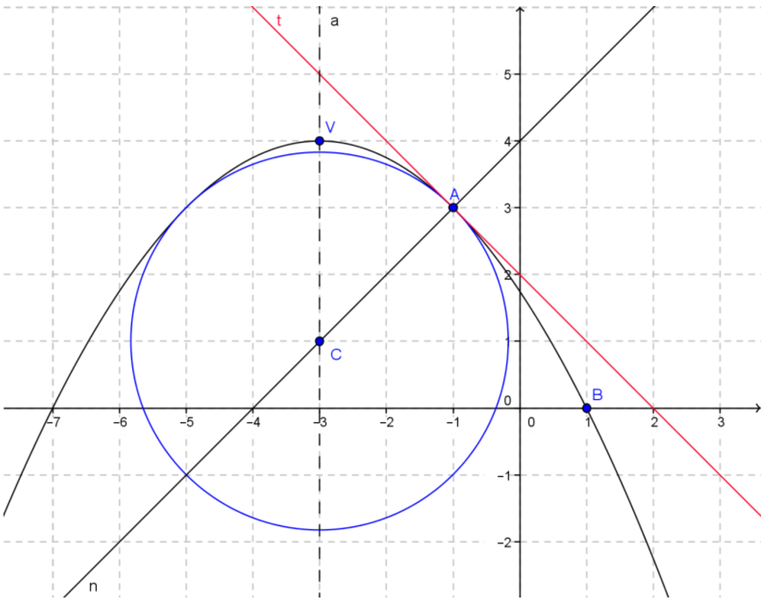

Figura 1- In figura sono rappresentati gli elementi geometrici elaborati nei primi due quesiti.

3) La parabola è simmetrica rispetto alla retta a:x=-3, ma questa retta è anche un diametro della circonferenza λ, quindi anche quest'ultima è simmetrica rispetto alla stessa retta, pertanto il punto A′ simmetrico di A rispetto alla retta a appartiene alle due curve. Occorre provare che le due curve sono anche tangenti in A′. Questa proprietà potrebbe essere già data per acquisita considerata la simmetria delle due curve rispetto alla retta a, tuttavia faremo vedere che essa sussiste risolvendo il sistema composto dalle equazioni delle due curve e riconoscendo che in A′ si raccolgono due dei punti comuni alle curve.

Coordinate di A′

[1] Ricordiamo che la normale alla parabola nel punto A è la retta perpendicolare alla retta tangente t alla curva nello stesso punto.

Il punto A′ ha la stessa ordinata di A; per quanto concerne l'ascissa, notiamo che dall'essere i punti A, A′ simmetrici rispetto all'asse di simmetria segue che il punto medio del segmento AA′ deve appartenere al suddetto asse, dunque deve risultare

$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = -3$ e quindi $x_{A'} = -6 - x_A = -5$; dunque $A'(-5;3)$.

Risoluzione del sistema

$$\begin{cases} \gamma : y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \\ \lambda : (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di *y* ricavato dalla prima ed elaborando l'espressione algebrica si perviene alla seguente equazione di quarto grado

$$x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25 = 0 \qquad (3.2)$$

A questo punto **ricordiamo che le due curve sono tangenti** in $A(-1;3)$, quindi *x*=-1 è soluzione doppia dell'equazione; eseguendo la divisione $(x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25):(x+1)$ si ottiene il quoziente $Q_1(x) = x^3 + 11x^2 + 35x + 25$. Risulta ancora esatta la divisione $Q_1(x):(x+1)$, il cui quoziente è $Q_2(x) = x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$. In definitiva, l'equazione (3.2) può essere posta nella forma

$$(x+1)^2(x+5)^2 = 0$$

e si riconosce che ammette come uniche soluzioni *x*=-1, *x*=-5, ciascuna contata due volte.

Ponendo *x*=-5 nell'equazione della parabola si ricava *y*=3 e dunque nel punto $A'(-5;3)$ si raccolgono due punti comuni alle due curve e perciò queste sono tangenti anche in A′ .

4) Classificazione del triangolo AA′C, perimetro e area

Il triangolo è intanto isoscele perché CA≅CA′, in quanto raggi della stessa circonferenza. Vogliamo provare che è anche rettangolo in C e per questo utilizziamo i coefficienti angolari delle rette dei due raggi.

$$m(CA) = 1 \ ; \ m(CA') = \frac{y_{A'} - y_C}{x_{A'} - x_C} = \frac{3-1}{-5+3} = -1 \ .$$

I due coefficienti angolari sono antireciproci, quindi i due raggi sono tra loro perpendicolari. C.V.D.

Perimetro di AA′C

$\overline{CA} = \overline{CA'} = 2\sqrt{2}$, $\overline{A'A} = x_A - x_{A'} = 4$, quindi $Perim(AA'C) = 4\sqrt{2} + 4 = 4(\sqrt{2} + 1)$

Area di AA′C

$$Area(AA'C) = \frac{1}{2}\overline{CA}^2 = 4$$

Segue la figura completa di tutti gli elementi geometrici elaborati.