Geometria analitica della parabola e della retta

Retta tangente, parabola che taglia ortogonalmente una retta, aree di triangoli

Considerato nel riferimento cartesiano Oxy il fascio di parabole avente equazione $y = kx^2$ e la retta $t: y = x - 2$, risolvere i seguenti quesiti.

1) Determinare l'equazione della parabola λ_1 del fascio che risulta tangente alla retta t. Detto A il corrispondente punto di contatto, trovarne le coordinate.
2) Determinare l'equazione della parabola λ_2 del fascio che taglia ortogonalmente la retta t. Detto B il punto di intersezione, trovarne le coordinate.
3) Determinare l'area del triangolo OAB.
4) Scrivere l'equazione della retta tangente t′ alla parabola λ_2 in B e sia H il punto in cui detta retta interseca il segmento OA. Determinare il rapporto tra le aree dei triangoli OBH, AHB e precisare quale percentuale rappresenta la superficie del triangolo AHB rispetto alla superficie del triangolo AOB.

Soluzione

1) Per determinare il valore del parametro *k* cui corrisponde la parabola del fascio tangente alla retta *t* impostiamo il sistema formato dall'equazione del fascio e dall'equazione della retta *t* e imponiamo la **condizione di tangenza**, cioè che il discriminante dell'equazione di secondo grado risolvente il sistema sia nullo.

$$\begin{cases} y = kx^2 \\ y = x - 2 \end{cases}, \qquad (1)$$

l'equazione risolvente è $$kx^2 - x + 2 = 0 \qquad (2)$$

e deve risultare $\Delta = 1 - 8k = 0$, da cui $k = \frac{1}{8}$.

La parabola richiesta ha equazione: $\lambda_1 : y = \frac{1}{8}x^2$.

Il punto di contatto A tra la retta *t* e la parabola λ_1 ha ascissa coincidente con il valore comune delle radici dell'equazione risolvente che si ottiene dalla (2) dopo aver posto $k = \frac{1}{8}$.

Quindi

$\frac{1}{8}x^2 - x + 2 = 0$, che diventa $x^2 - 8x + 16 = 0$ e si ha $x_1 = x_2 = x_A = 4$, da cui $y_A = 4 - 2 = 2$.

Dunque A(4;2).

2) **Strategia risolutiva**- Si deve fare riferimento ancora al sistema di equazioni (1) e quindi all'equazione risolvente (2). Si trovano le radici della (2), che rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della generica parabola del fascio con la retta *t* e le corrispondenti ordinate dei punti (due) in cui la parabola richiesta λ_2 interseca la retta t. Si dovrà imporre che in uno dei punti di intersezione la **retta tangente alla parabola e la retta *t* siano ortogonali**; da questa condizione si risalirà al valore del parametro *k*.

Elaborazioni

$$kx^2-x+2=0\,;\,x=\frac{1\pm\sqrt{1-8k}}{2k}\text{, da cui } x_1=\frac{1-\sqrt{1-8k}}{2k},\ x_2=\frac{1+\sqrt{1-8k}}{2k}$$

I punti di intersezione $B_1(x_1;y_1)$, $B_2(x_2;y_2)$ tra la parabola e la retta t sono

$$B_1\left(\frac{1-\sqrt{1-8k}}{2k};\frac{1-4k-\sqrt{1-8k}}{2k}\right),\ B_2\left(\frac{1+\sqrt{1-8k}}{2k};\frac{1-4k+\sqrt{1-8k}}{2k}\right)$$

Le equazioni delle rette tangenti a λ_2 in $B_1(x_1;y_1)$ e $B_2(x_2;y_2)$[1] rispettivamente sono:

$$t_1:\frac{y+y_1}{2}=kx_1x\text{, da cui } t_1:y=2kx_1x-y_1,$$

$$t_2:\frac{y+y_2}{2}=kx_2x\text{, da cui } t_2:y=2kx_2x-y_2.$$

La condizione di perpendicolarità della tangente t_1 con la retta *t* richiede che i coefficienti angolari siano antireciproci:

$m(t_1)\cdot m(t)=-1$ diventa $2kx_1\cdot 1=-1$, cioè $2k\cdot\dfrac{1-\sqrt{1-8k}}{2k}=-1$, da cui

$\sqrt{1-8k}=2$ e quindi $k=-\dfrac{3}{8}$.

Con analogo procedimento, richiedendo che siano perpendicolari la retta *t* e la tangente t_2 deve aversi

$m(t_2)\cdot m(t)=-1$, che diventa $2kx_2\cdot 1=-1$, cioè $2k\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-8k}}{2k}=-1$, da cui $\sqrt{1-8k}=-2$ e quest'equazione non ha soluzione.

Concludiamo che il **taglio ortogonale** tra la parabola λ_2 del fascio cercata e la retta *t* si può verificare solo nel punto B_1 e ciò si ha per $k=-3/8$.

Equazione della parabola $\lambda_2: y=-\dfrac{3}{8}x^2$; punto di intersezione $B_1\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

[1] Per scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti $B_1(x_1;y_1)$, $B_2(x_2;y_2)$ abbiamo applicato le **formule di sdoppiamento** per velocizzare il processo risolutivo.

Il punto B indicato nel testo coincide con B_1.

3) Area del triangolo OAB

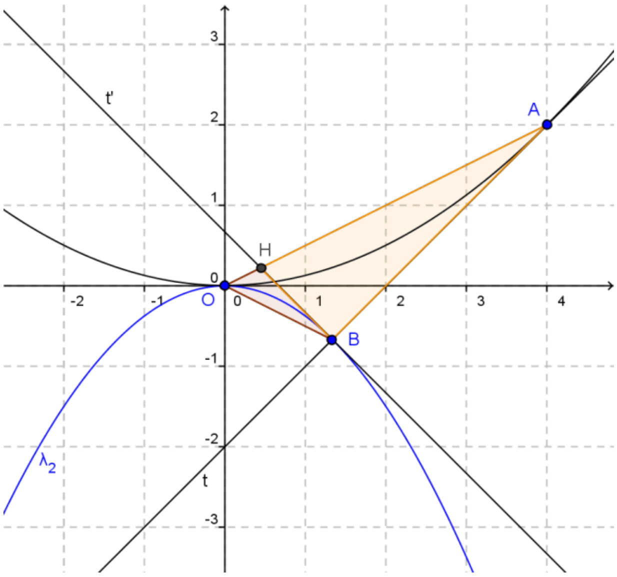
Calcoliamo l'area del triangolo utilizzando la formula del determinante del terzo ordine, avendo cura nell'impostazione del determinante di prendere i vertici nel verso antiorario. Si ha

$$Area(AOB) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_O & y_O & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{3}$$

4) Sappiamo che **la retta *t*** è tagliata ortogonalmente dalla parabola λ_2 in B, dunque *t* **è perpendicolare alla retta tangente alla parabola nello stesso punto B**; pertanto la retta tangente t' richiesta ha coefficiente angolare $m'=-1/m(t)=-1$ e la sua equazione è

$$t': y - y_B = -(x - x_B), \text{ cioè } \; t': y = -x + \frac{2}{3}.$$

Ricerca delle coordinate del punto H



L'equazione della retta [O;A] è $y=x/2$. Risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette [O;A] e t' si trovano le coordinate di H.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ t': y = -x + \frac{2}{3} \end{cases}; \qquad \text{risulta } H\left(\frac{4}{9};\frac{2}{9}\right).$$

Confronto delle aree dei triangoli OBH, AHB

Abbiamo in precedenza trovato l'area del triangolo AOB; calcoliamo ora l'area del triangolo AHB che è rettangolo in B e successivamente per differenza determineremo l'area di OBH.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2};$$

$$\overline{HB} = \sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{9}\right)^2} = \frac{8}{9}\sqrt{2};$$

$$Area(AHB) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{HB}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{8}{9}\sqrt{2} = \frac{64}{27}$$

$$Area(OBH) = Area(AOB) - Area(AHB) = \frac{8}{3} - \frac{64}{27} = \frac{8}{27}$$

Calcolo del rapporto tra le aree

$$r = \frac{Area(OBH)}{Area(AHB)} = \frac{8}{27} : \frac{64}{27} = \frac{1}{8}$$

Il valore del precedente rapporto indica che la superficie del triangolo OBH è 1/8 della superficie del triangolo AHB, pertanto quest'ultimo rappresenta gli 8/9 della superficie del triangolo AOB. Il valore percentuale richiesto è

$$\frac{Superficie(AHB)}{Superficie(AOB)} \approx 88,9\%$$