

Studio di un fascio di curve

Nel piano cartesiano si consideri l'equazione

$$x^2 + (2k-3)y^2 - 4x + 6y = 0$$

Quesiti

- 1) Classificare il fascio di curve rappresentato dall'equazione precisando se ammette punti base.
- 2) Stabilire per quali valori del parametro k l'equazione rappresenta una curva non degenera. Riconosciuto che esiste un solo valore di k per cui la curva è degenera, determinare l'equazione della stessa e rappresentarla.
- 3) Per i valori del parametro corrispondenti a curve non degeneri precisare quando le corrispondenti curve hanno come centro un punto proprio e determinare in tal caso il luogo geometrico dei centri.
- 4) Riconoscere che esiste un solo valore del parametro per cui si ha una circonferenza ed un solo valore di k per cui si ha una parabola. Rappresentare le due curve nello stesso riferimento cartesiano e riconoscere che sono tangenti tra loro.
- 5) Determinare le equazioni delle due curve corrispondenti ai valori $k=1/2$ e $k=3$, precisandone il tipo e calcolare i valori delle rispettive eccentricità. Rappresentare le due curve nello stesso riferimento cartesiano.

Elaborazioni

- 1) Per stabilire se il fascio ha punti base determiniamo le equazioni delle due curve generatrici e risolviamo il sistema formato con dette equazioni.
...
- 2) L'equazione del fascio al variare del parametro k rimane di secondo grado, dunque rappresenta in ogni caso una conica. Per riconoscere tra le curve del fascio l'esistenza di curve degeneri o di curve non degeneri occorre calcolare il determinante della conica. Ricordiamo che il determinante della conica la cui equazione sia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (2.1)$$

è

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

...

In Figura 2 sono rappresentate le due rette (in colore rosso). Si noti che ...

- 3) Ricordiamo che le coniche non degeneri aventi come centro un punto proprio (dette **coniche a centro**) sono l'ellisse (è compresa come caso particolare anche la circonferenza) e l'iperbole, mentre la parabola ha come centro un punto all'infinito.

Occorre stabilire, ...

Coordinate del centro per le iperboli e le ellissi del fascio (caso $k \neq 3/2$)

Le coordinate del centro si ottengono risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$C: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}, \dots$$

Luogo geometrico dei centri

...

- 4) Dall'equazione del fascio si ottiene una circonferenza se $2k-3=1$, quindi per $k=2$ e l'equazione è

...

Tangenza tra la circonferenza e la parabola

Dalle equazioni delle due curve si riconosce immediatamente che nell'origine degli assi hanno come tangente la stessa retta che è $t: 2x-3y=0$, quindi in detto punto le due curve sono per definizione tangenti. ...si riconosce che le stesse sono anche tangenti

...

Osservazione

Prese comunque due **curve** non degeneri del fascio esse risultano **bitangenti** ...

- 5) Con $k=1/2$ si ha l'iperbole $\gamma_5: x^2 - 2y^2 - 4x + 6y = 0$ e con $k=3$ l'ellisse $E: x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 0$. Le due curve hanno gli assi di simmetria traslati rispetto agli assi cartesiani.

...