Studio di un fascio di curve

Nel piano cartesiano si consideri l'equazione

$x^2+(2k-3)y^2-4x+6y=0$

Quesiti

1) Classificare il fascio di curve rappresentato dall'equazione precisando se ammette punti base.
2) Stabilire per quali valori del parametro k l'equazione rappresenta una curva non degenere. Riconosciuto che esiste un solo valore di k per cui la curva è degenere, determinare l'equazione della stessa e rappresentarla.
3) Per i valori del parametro corrispondenti a curve non degeneri precisare quando le corrispondenti curve hanno come centro un punto proprio e determinare in tal caso il luogo geometrico dei centri.
4) Riconoscere che esiste un solo valore del parametro per cui si ha una circonferenza ed un solo valore di k per cui si ha una parabola. Rappresentare le due curve nello stesso riferimento cartesiano e riconoscere che sono tangenti tra loro.
5) Determinare le equazioni delle due curve corrispondenti ai valori k=1/2 e k=3, precisandone il tipo e calcolare i valori delle rispettive eccentricità. Rappresentare le due curve nello stesso riferimento cartesiano.

Elaborazioni

1) Per stabilire se il fascio ha punti base determiniamo le equazioni delle due curve generatrici e risolviamo il sistema formato con dette equazioni.

   Scrivendo l'equazione nella forma $x^2-3y^2-4x+6y+2ky^2=0$ si ottengono le equazioni delle due curve generatrici:

   $g_1: y^2=0, \qquad g_2: x^2-3y^2-4x+6y=0 \qquad (1.1)$

   Il sistema formato con le equazioni (1.1) ammette come soluzioni le coppie (x=0;y=0) , (x=4;y=0); il fascio di curve ha pertanto due punti base che sono l'origine O(0;0) ed A(4;0).

   Nella Figura 1 sono rappresentate le due curve generatrici. Osserviamo che g_1 è l'asse delle ascisse contato due volte e g_2 è un'iperbole. Precisiamo, comunque, che la retta doppia $g_1: y^2=0$ non si può ottenere per alcun valore reale del parametro e va vista come la curva limite cui tende la generica curva del fascio per k→±∞.

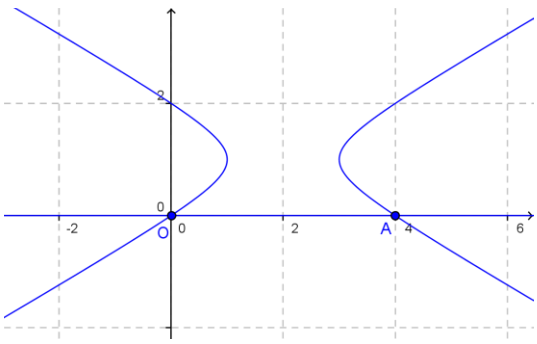

Figura 1

2) L'equazione del fascio al variare del parametro k rimane di secondo grado, dunque rappresenta in ogni caso una conica. Per riconoscere tra le curve del fascio l'esistenza di curve degeneri o di curve non degeneri occorre calcolare il determinante della conica. Ricordiamo che il determinante della conica la cui equazione sia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2.1)$$

è

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

e quindi nel caso specifico

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2k-3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4(2k-3) - 9 = -8k + 3$$

Deduciamo che con $k = \frac{3}{8}$ si ha una conica degenere

e per $k \neq \frac{3}{8}$ si hanno coniche non degeneri.

L'equazione della conica γ_1 degenere è

$$\gamma_1 : x^2 + \left(2 \cdot \frac{3}{8} - 3\right) y^2 - 4x + 6y = 0 \rightarrow$$
$$\gamma_1 : \left(x - \frac{3}{2}y\right)\left(x + \frac{3}{2}y - 4\right) = 0 .$$

La conica si spezza nelle due rette distinte

$r_1 : 2x - 3y = 0$ $r_2 : 2x + 3y - 8 = 0$.

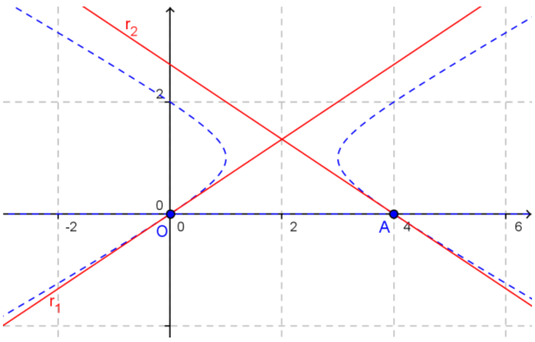

Figura 2

In Figura 2 sono rappresentate le due rette (in colore rosso). Si noti che r_1 passa per l'origine O degli assi ed r_2 per il secondo punto base A.

3) Ricordiamo che le coniche non degeneri aventi come centro un punto proprio (dette **coniche a centro**) sono l'ellisse (è compresa come caso particolare anche la circonferenza) e l'iperbole, mentre la parabola ha come centro un punto all'infinito.

Occorre stabilire, relativamente ai valori k≠3/8 , quando l'equazione rappresenta ellissi o iperboli. La classificazione delle curve appartenenti al fascio in oggetto si effettua con il valore del determinante

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$$

La conica non degenere è un'ellisse se $A_{33} > 0$, è un'iperbole se $A_{33} < 0$, è una parabola se $A_{33} = 0$.

Pertanto, essendo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2k-3 \end{vmatrix} = 2k - 3$ la conica è una parabola con k=3/2, un'ellisse con k>3/2, un'iperbole con k<3/2.

Coordinate del centro per le iperboli e le ellissi del fascio (caso k≠3/2)

Le coordinate del centro si ottengono risolvendo il seguente sistema di equazioni

$C:\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0 \end{cases}$, quindi il sistema $\begin{cases} x-2=0 \\ (2k-3)y+3=0 \end{cases}$, da cui

$$C:\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{3}{3-2k} \end{cases}$$

Luogo geometrico dei centri

L'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri propri delle curve non degeneri del fascio è la retta r:x=2 privata del punto B(2;0) perché si riconosce che non si può ottenere y=0 per alcun valore reale di k, mentre è presente ogni altro punto (2;y) del piano cartesiano.

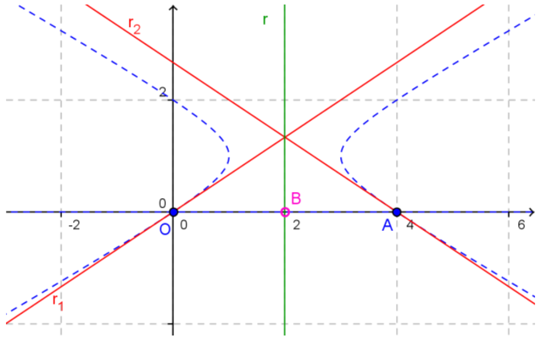

Figura 3

4) Dall'equazione del fascio si ottiene una circonferenza se 2k-3=1, quindi per k=2 e l'equazione è

$$\gamma_3: x^2+y^2-4x+6y=0$$

Abbiamo precisato nel precedente punto 3) che per k=3/2 la curva ottenuta dal fascio è una parabola, detta curva è l'unica parabola del fascio e la sua equazione è

$\gamma_4: x^2-4x+6y=0$, che si può porre nella forma $\gamma_4: y=-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{2}{3}x$.

Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e vertice $V\left(2;\dfrac{2}{3}\right)$.

Tangenza tra la circonferenza e la parabola

Dalle equazioni delle due curve si riconosce immediatamente che nell'origine degli assi hanno come tangente la stessa retta che è t:2x-3y=0, quindi in detto punto le due curve sono per definizione tangenti. Risolvendo il sistema formato con le equazioni delle due curve si riconosce che le stesse sono anche tangenti nel secondo punto base A(4;0).

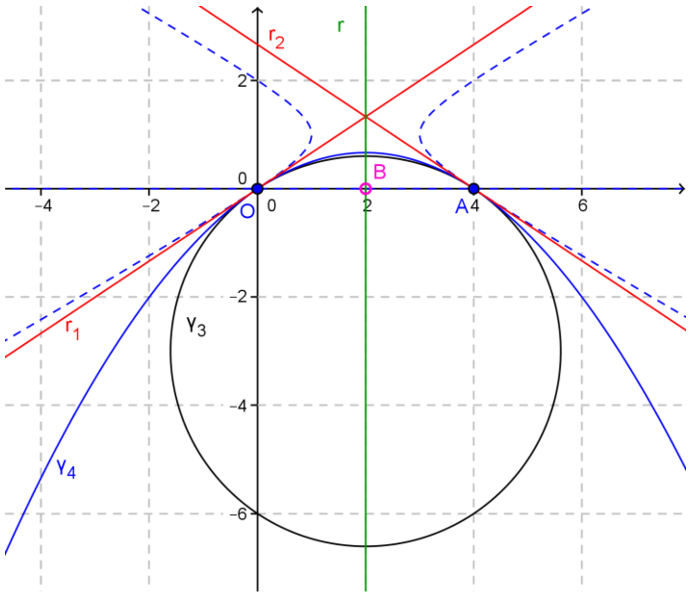

Figura 4

$$\begin{cases}\gamma_3 : x^2+y^2-4x+6y=0 \\ \gamma_4 : x^2-4x+6y=0\end{cases} \to \begin{cases}x^2+y^2-x^2=0 \\ x^2=4x-6y\end{cases}$$, da cui $\begin{cases}y_1=y_2=0 \\ x^2=4x\end{cases}$, quindi ciascuno dei due punti (0;0), (4;0) è soluzione doppia, per cui le due curve sono tangenti in ciascuno di essi.

Osservazione

Prese comunque due **curve** non degeneri del fascio esse risultano **bitangenti** in O ed A e ciò è dovuto al fatto che una delle curve generatrici del fascio è l'asse delle ascisse contato due volte.

5) Con k=1/2 si ha l'iperbole $\gamma_5 : x^2-2y^2-4x+6y=0$ e con k=3 l'ellisse $E: x^2+3y^2-4x+6y=0$. Le due curve hanno gli assi di simmetria traslati rispetto agli assi cartesiani.

Possiamo scrivere le equazioni delle due curve in forma diversa in modo da far comparire nelle stesse le coordinate dei rispettivi centri di simmetria.

Per l'iperbole risulta

$\gamma_5 : x^2-2y^2-4x+6y=0$, da cui

$$(x-2)^2-4-2\left(y^2-3y\right)=0 \to$$

$$(x-2)^2-4-2\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{2}=0 \to$$

$$(x-2)^2-2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2} \to$$

$$\gamma_5 : \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}-\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=-1$$

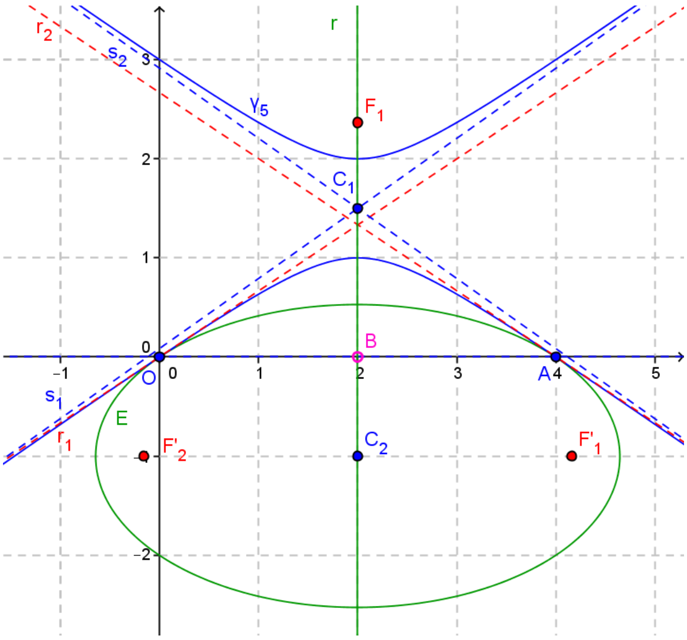

Figura 5

L'iperbole ha centro nel punto $C_1\left(2;\frac{3}{2}\right)$, i fuochi e i vertici reali sulla retta x=2; uno dei fuochi è il punto $F_1\left(2;\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ed il valore dell'eccentricità è $e=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$. Gli asintoti della curva sono le rette

$$s_1 : y-\frac{3}{2}=\frac{x-2}{\sqrt{2}},\ s_2 : y-\frac{3}{2}=-\frac{x-2}{\sqrt{2}}.$$

Per l'ellisse

$$E: x^2+3y^2-4x+6y=0$$

dopo alcune elaborazioni si ha $E: \frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y+1)^2}{\frac{7}{3}}=1$.

La curva ha come centro $C_2(2;-1)$, i fuochi sulla retta y=-1 e sono i punti $F_1^{'}\left(2+\sqrt{\frac{14}{3}};-1\right)$, $F_2^{'}\left(2-\sqrt{\frac{14}{3}};-1\right)$. L'eccentricità della curva vale $e=\sqrt{\frac{14}{3}}:\sqrt{7}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.