Sulla parabola e sul segmento parabolico

Problema

Nel piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano xOy si consideri la parabola λ con asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per i tre punti A(-1;2), B(1;-2), C(2;-1).

Quesiti

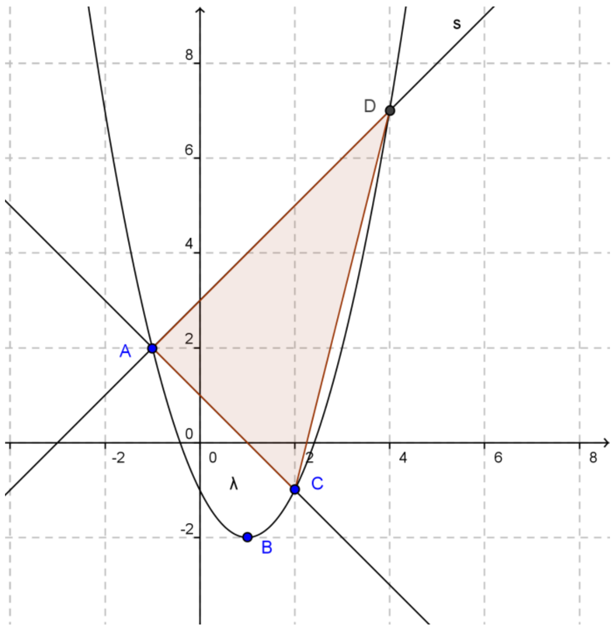
1) Scrivere l'equazione della parabola.
2) Scrivere l'equazione della retta s perpendicolare alla retta congiungente A e C e detto D l'ulteriore punto in cui s interseca la parabola calcolare perimetro ed area del triangolo ACD.
3) Calcolare l'area del segmento parabolico di base AC.
4) Determinare sull'arco di estremi C e D della parabola il punto E e condurre per esso la retta s' parallela ad s, che intersechi in F e G rispettivamente CD e AC. Indicata con α l'ascissa di E, esprimere in funzione di α l'area del quadrilatero ADFG e precisare il dominio di definizione della funzione ottenuta.
5) Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

1) L'equazione della parabola λ è del tipo $\lambda : y = ax^2 + bx + c$ ed i valori dei coefficienti a, b, c si determinano imponendo che le coordinate dei punti A, B, C soddisfino detta equazione. Si ottiene il sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$, soddisfatto da $a = 1, b = -2, c = -1$.

L'equazione della parabola è $\lambda : y = x^2 - 2x - 1$. Osserviamo che il vertice della parabola coincide con il punto B(1;-2).



2) Il coefficiente angolare della retta congiungente A e C è

$$m([A;C]) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-2}{2+1} = -1$$

quindi quello della retta s è m'=1 e l'equazione della stessa è

$s : y - 2 = x + 1$, da cui $s : y = x + 3$

Intersezioni delle retta s con la parabola

$$\begin{cases} s: y = x+3 \\ \lambda: y = x^2-2x-1 \end{cases} \rightarrow$$ A(-1;2), D(4;7).

Area e perimetro di ACD

Il triangolo è rettangolo in A e risulta $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$, $\overline{AD} = 5\sqrt{2}$, $\overline{DC} = 2\sqrt{17}$

$$Area(ACD) = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2} = 15$$

$$Perim.(ACD) = 8\sqrt{2}+2\sqrt{17}$$

3) Tangente alla parabola parallela alla retta AC

$$t: y = -x-\frac{5}{4} \rightarrow t: 4x+4y+5=0$$

Area del segmento parabolico

Occorre la misura della base AC e dell'altezza del segmento parabolico che è uguale alla distanza tra la retta della base AC e la retta tangente t; per ottenere questo valore si può trovare con la formula della **distanza di un punto da una retta** la distanza di A dalla retta t. Si ha:

$$d(A;t) = \frac{|4(-1)+4(2)+5|}{\sqrt{4^2+4^2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = h$$

L'area del segmento parabolico si determina con la formula di Archimede:

$$Area\_seg = \frac{2}{3}\cdot\overline{AC}\cdot h = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

4) Il generico punto E della parabola sull'arco di estremi C, D ha coordinate $E(\alpha;\alpha^2-2\alpha-1)$, con la limitazione $x_C \le \alpha \le x_D$ per il parametro.

Equazione della retta s'//s

$s': y-(\alpha^2-2\alpha-1) = x-\alpha$, da cui $s': y = x+\alpha^2-3\alpha-1$

Intersezione di s' con AC

Equazione della retta AC: $x+y-1=0$

Equazione della retta CD: $4x-y-9=0$

Punto F $\begin{cases} 4x-y-9=0 \\ s': y = x+\alpha^2-3\alpha-1 \end{cases} \rightarrow F\left(\frac{\alpha^2-3\alpha+8}{3};\frac{4\alpha^2-12\alpha+5}{3}\right)$

Punto G $\begin{cases} x+y-1=0 \\ s': y=x+\alpha^2-3\alpha-1 \end{cases} \to G\left(\frac{2+3\alpha-\alpha^2}{2}; \frac{\alpha^2-3\alpha}{2}\right)$

Il quadrilatero ADFG è un trapezio rettangolo.

Calcolo dell'area

Risulta

$$\overline{AG}=\frac{1}{2}\cdot\left|\alpha^2-3\alpha-4\right|;\ \overline{GF}=\frac{1}{6}\cdot\left|5\alpha^2-15\alpha+10\right|$$

$$Area(ADFG)=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{GF}\right)\cdot\overline{AG}=\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}+\frac{5}{6}\cdot\left|\alpha^2-3\alpha+2\right|\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\alpha^2-3\alpha-4\right|$$

A questo punto studiamo il segno degli argomenti dei moduli nell'intervallo di variabilità di α, cioè in $\left[x_C; x_D\right]=\left[2;4\right]$.

Osserviamo che risulta

$\alpha^2-3\alpha+2\geq 0$ per $(\alpha\leq 1)\vee(\alpha\geq 2)$,

$\alpha^2-3\alpha-4\geq 0$ per $(\alpha\leq -1)\vee(\alpha\geq 4)$,

pertanto nell'intervallo [2;4] si ha

$\left|\alpha^2-3\alpha+2\right|=\alpha^2-3\alpha+2$ e

$\left|\alpha^2-3\alpha-4\right|=-\left(\alpha^2-3\alpha-4\right)$;

l'area del trapezio è perciò

$$Area(ADFG)=S(\alpha)=$$
$$\frac{1}{4}\left(5\sqrt{2}+\frac{5}{6}\cdot\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\right)\cdot\left(-\alpha^2+3\alpha+4\right)$$

con $2\leq\alpha\leq 4$.

5) La figura completa è a margine.