Geometria analitica[1]

(Sull'ellisse)

Problema

Data l'ellisse di equazione $x^2+9y^2-9=0$ determina, sull'arco di curva di coordinate positive, un punto P in modo che, considerati il vertice A di ascissa positiva ed il vertice B di ordinata positiva, il triangolo PAB sia isoscele.

Soluzione

Poniamo P(α;β). Si tratta di determinare i valori che devono assumere le coordinate di P in modo che siano soddisfatte le due seguenti condizioni:

1. Il punto deve appartenere all'arco di ellisse che ricade nel primo quadrante e chiaramente non può coincidere con alcuno dei due vertici della curva A(3;0), B(01). I valori di α e β devono essere positivi e verificare l'equazione dell'ellisse $\alpha^2+9\beta^2-9=0$.
2. Il punto P deve essere il vertice del triangolo isoscele PAB, che può essere isoscele solo su AB. Ne segue che deve risultare $\overline{PA}=\overline{PB}$, ovvero $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$. Da questa uguaglianza si deduce una seconda equazione che va messa a sistema con la precedente ottenendo un sistema. La soluzione, o le soluzioni, di questo sistema forniscono i valori che potranno assumere i parametri α e β.

Si ha: $\overline{PA}^2=(\alpha-3)^2+\beta^2$, $\quad\overline{PB}^2=\alpha^2+(\beta-1)^2$, e quindi

$$(\alpha-3)^2+\beta^2=\alpha^2+(\beta-1)^2 \to 3\alpha-\beta=4$$

Si deve risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases}3\alpha-\beta=4\\ \alpha^2+9\beta^2-9=0\end{cases}.$$

Osserviamo che dovendo risultare α> 0 e β>0, dall'essere $\beta=3\alpha-4$, si deduce l'ulteriore limitazione per l'ascissa di P: $\alpha>\frac{4}{3}$. Ciò premesso si risolve il sistema.

$$\begin{cases}3\alpha-\beta=4\\ \alpha^2+9\beta^2-9=0\end{cases} \to \begin{cases}\beta=3\alpha-4\\ \alpha^2+9(3\alpha-4)^2-9=0\end{cases} \to \begin{cases}\beta=3\alpha-4\\ 82\alpha^2-9\cdot 24\alpha+9\cdot 15=0\end{cases}$$

L'equazione risolvente di secondo grado ottenuta ammette come radici i valori

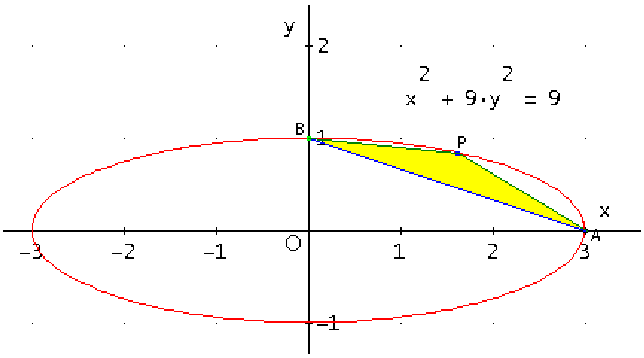
$$\alpha_1=\frac{108+3\sqrt{66}}{82}\simeq 1{,}614>\frac{4}{3},\quad \text{quindi è accettabile;}$$

$$\alpha_2=\frac{108-3\sqrt{66}}{82}<\frac{4}{3},\quad \text{quindi non è accettabile.}$$

Concludiamo che P deve avere ascissa α_1 e conseguentemente ordinata

$$\beta_1=3\alpha_1-4=\frac{9\sqrt{66}-4}{82}.$$

Riportiamo a lato la rappresentazione dell'ellisse e del triangolo isoscele cercato.



[1] Problema richiesto da Ettore, utente della rete.