Test sull'ellisse (vai alla soluzione)

Quesiti

1) Considerata nel piano cartesiano l'ellisse $\Gamma: 2x^2 + y^2 = 8$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

1.1	I fuochi si trovano sull'asse delle ordinate	V	F
1.2	Il semiasse minore misura 2 e quello maggiore misura 4	V	F
1.3	Il semiasse maggiore misura $2\sqrt{2}$	V	F
1.4	L'eccentricità misura $1/\sqrt{2}$	V	F

2) Considerata nel piano cartesiano l'ellisse $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

2.1	L'ellisse non passa dal punto A(1;1)	V	F
2.2	Il punto B(0;2) è esterno alla curva	V	F
2.3	La curva passa dal punto $C\left(\sqrt{2};\frac{1}{2}\right)$	V	F
2.4	la distanza focale misura 3	V	F

3) Indicare fra le equazioni proposte quella dell'ellisse riferita ai propri assi avente il punto V(3;0) come un suo vertice, fuochi sull'asse delle ascisse e distanza focale 4.

3.1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3.2 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

3.3 $5x^2 + 9y^2 = 1$

3.4 $x^2 + 9y^2 = 9$

4) Considerate nel piano cartesiano l'ellisse $E: 2x^2 + y^2 = 8$ e la retta $s: x - y + 2 = 0$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

4.1	La retta s è secante la curva ed uno dei due punti comuni è A(-2;0)	V	F
4.2	L'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate, la retta s ha con l'ellisse in comune il punto A(-2;0) ed un secondo punto nel primo quadrante.	V	F
4.3	La retta s è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ed ha in comune con l'ellisse il punto A(-2;0) ed il punto $P\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$.	V	F
4.4	Ogni retta parallela alla retta s è secante l'ellisse.	V	F

5) Dopo aver determinato le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $E: 2x^2 + y^2 = 8$ parallele alle bisettrici dei quadranti, valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

5.1 Le equazioni delle quattro tangenti sono

$t_1: y = x + 2\sqrt{3}$ $\quad$ $t_2: y = x - 2\sqrt{3}$

$t_3: y = -x + 2\sqrt{3}$ $\quad$ $t_4: y = -x - 2\sqrt{3}$ V F

5.2 Le rette $t_1 : y = x + 2\sqrt{3}$, $t_3 : y = -x + 2\sqrt{3}$ sono tra loro perpendicolari e si intersecano in un punto di ascissa positiva. V F

5.3 Le rette t_1, t_2, t_3, t_4 determinano un quadrato in cui è inscritta l'ellisse ed il perimetro del quadrato misura $8\sqrt{6}$. V F

6) Di seguito sono indicate le equazioni di alcune ellissi; di esse solo due hanno le misure degli assi che sono una metà dell'altra. Indica la risposta esatta.

a) $x^2 + 4y^2 = 4$ b) $x^2 + 2y^2 = 10$ c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $2x^2 + y^2 = 12$ e) $2x^2 + y^2 = 2$

6.1 a) e b)
6.2 b) e c)
6.3 a) ed e)
6.4 a) e c)

7) Se due ellissi hanno la stessa eccentricità ed uguale la misura dell'asse minore o uguale la misura dell'asse maggiore hanno necessariamente uguale anche la misura del secondo asse?

SI NO

8) Data l'ellisse di equazione $E: 4x^2 + y^2 = 5$ e la retta $t: 4x + y = 5$ verificare che la retta è tangente all'ellisse e determinare le coordinate del punto di contatto.	
Elaborazioni	Coordinate del punto di contatto:

9) Data l'ellisse $E: (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ trovare le coordinate del centro C, le misure dei semiassi *a*, *b* ed il valore dell'eccentricità selezionando la risposta esatta tra quelle proposte:

9.1 C(1;0), a=1, b=2, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9.2 C(1;0), a=1, b=2, $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9.3 C(1;0), a=1, b=2, $e = \frac{1}{2}$

10) Stabilire per quali valori del parametro *m* l'equazione

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3-m} = 1$$

rappresenta un'ellisse nel piano cartesiano. Indicare la risposta esatta fra quelle proposte.

10.1 per ogni valore di *m* diverso da zero e da tre
10.2 per ogni valore di *m* dell'intervallo]0;3[

10.3 per ogni valore reale di m minore di tre e diverso da zero

11) Considerata l'equazione della famiglia di ellissi

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2+2}=1$$

dimostrare che al variare del parametro **m** esiste solo un valore reale per m^2 per il quale si ottiene un'ellisse che passa per il punto $P\left(1;\sqrt{2}\right)$ ed indicare tale valore.

Elaborazioni

Risposta:
m^2 = …….

12) Considerata l'equazione del fascio di curve $F: x^2+(2-k)y^2=k+1$ stabilire per quali valori del parametro k si ottengono ellissi con i fuochi sull'asse delle ascisse.

Elaborazioni

Risposta:

13) Considerata l'ellisse di equazione

$$E: 4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 7 = 0$$

scrivere le equazioni della traslazione **τ** che permettono il passaggio dal sistema di riferimento cartesiano *x*Oy al sistema di riferimento cartesiano XO′Y, avente come origine il punto O′ centro dell'ellisse, come assi coordinati le rette O′X, O′Y parallele e concordi agli assi Ox, Oy. Scrivere l'equazione dell'ellisse nel riferimento XO′Y e determinare le misure dei semiassi, le coordinate dei fuochi ed il valore dell'eccentricità.

Elaborazioni

Risposte

Equazioni della traslazione N.B. Date le coordinate $(x_{O'}; y_{O'})$ di O′ nel riferimento *x*Oy e le coordinate $(x_P; y_P)$ del generico punto P nel riferimento *x*Oy, si devono scrivere le coordinate $(X_P; Y_P)$ dello stesso punto P.	$\tau: \begin{cases} \\ \end{cases}$
Equazione dell'ellisse riferita ai propri assi:	**Misure dei semiassi**
Coordinate dei fuochi	**Valore dell'eccentricità**

Soluzione

Quesiti

1) Considerata nel piano cartesiano l'ellisse $\Gamma: 2x^2 + y^2 = 8$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

1.1	I fuochi si trovano sull'asse delle ordinate	**V**	F
1.2	Il semiasse minore misura 2 e quello maggiore misura 4	V	**F**
1.3	Il semiasse maggiore misura $2\sqrt{2}$	**V**	F
1.4	L'eccentricità misura $1/\sqrt{2}$	**V**	F

Risposte

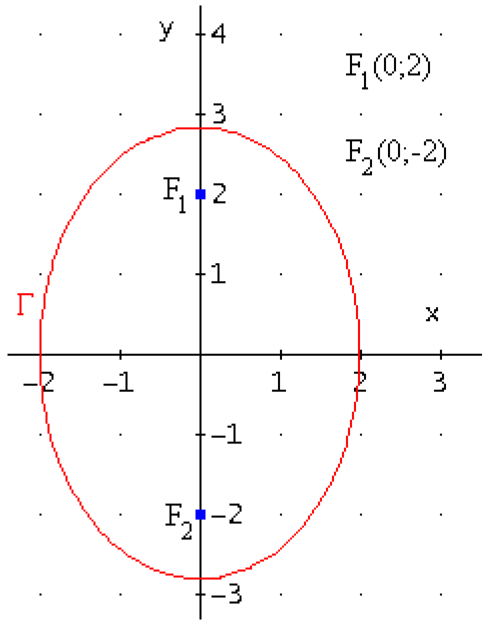
1.1 **Vera** I fuochi sono i punti $F_1(0;2)$, $F_2(0;-2)$

1.2 **Falsa** Il semiasse minore misura *a*=2; il semiasse maggiore misura $b = 2\sqrt{2}$

1.3 **Vera** Vedere la risposta relativa al punto 1.1

1.4 **Vera** L'eccentricità è data dal rapporto tra la semidistanza focale e la misura del semiasse minore.
In questo caso c=2, $b = 2\sqrt{2}$ ⇒eccentricità:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{2}{2\sqrt{2}} == \frac{1}{\sqrt{2}}$$



2) Considerata nel piano cartesiano l'ellisse

$\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

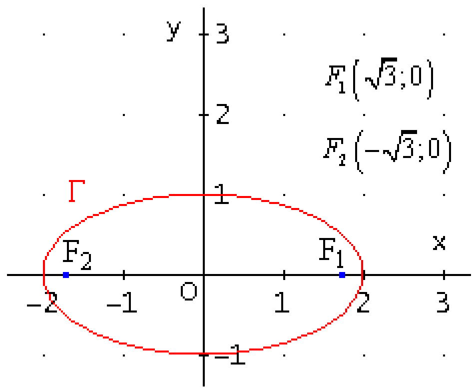
2.1	L'ellisse non passa dal punto A(1;1)	**V**	F
2.2	Il punto B(0;2) è esterno alla curva	**V**	F
2.3	La curva passa dal punto $C\left(\sqrt{2};\frac{1}{2}\right)$	V	**F**
2.4	La distanza focale misura 3	V	**F**

Risposte

2.1 **Vera** Infatti le coordinate del punto A non soddisfano l'equazione della curva. Il punto A è esterno alla curva.
I fuochi sono i punti $F_1(0;2)$, $F_2(0;-2)$

2.2 **Vera** La curva taglia l'asse delle ordinate nei due vertici $V_1(0;1)$, $V_2(0;-1)$ e non ha altri punti sullo stesso asse esterni al segmento $V_1 V_2$.

2.3 **Falsa** Le coordinate del punto non soddisfano l'equazione della curva come si deduce dalla seguenti elaborazioni



$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\neq 1$$

2.4 **Falsa** I fuochi dell'ellisse sono i punti $F_1\left(\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{3};0\right)$ e la distanza focale è $2c=2\sqrt{3}$.

3) Indicare fra le equazioni proposte quella dell'ellisse riferita ai propri assi avente il punto V(3;0) come un suo vertice, fuochi sull'asse delle ascisse e distanza focale 4.

3.1 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

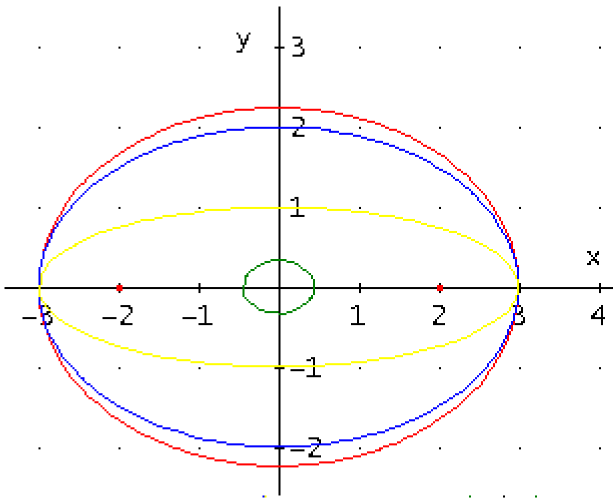
3.2 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

3.3 $5x^2+9y^2=1$

3.4 $x^2+9y^2=9$

Risposta

L'equazione dell'ellisse è la **3.2**; nella figura a lato la curva corrispondente è indicata con colore **rosso**; la curva relativa all'equazione 3.1 è indicata in **blu**; in **verde** è indicata la curva relativa all'equazione 3.3; in **giallo** è quella relativa all'equazione (3.4). Dalla figura si evince che anche le ellissi di equazione (3.1) e (3.4) passano dal punto V(3;0), ma solo la (3.2) ha distanza focale 4. Infatti i suoi fuochi sono i punti $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$.



4) Considerate nel piano cartesiano l'ellisse $E: 2x^2+y^2=8$ e la retta $s: x-y+2=0$ valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

4.1 La retta s è secante la curva ed uno dei due punti comuni è A(-2;0)

4.2 L'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate, la retta s ha con l'ellisse in comune il punto A(-2;0) ed un secondo punto nel primo quadrante.

4.3 La retta s è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ed ha in comune con l'ellisse il punto A(-2;0) ed il punto $P\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4.4 Ogni retta parallela alla retta s è secante l'ellisse.

Risposte

4.1 **Vera** Infatti le coordinate del punto A soddisfano le equazioni delle due curve.

4.2 **Vera** Abbiamo già precisato che il punto A(-2;0) è comune alle due curve; l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate ed il semiasse maggiore misura $b=2\sqrt{2}\Rightarrow$ il punto $V\left(0;2\sqrt{2}\right)$ è un vertice dell'ellisse. Poiché la retta s taglia l'asse delle ordinate nel punto B(0;2) e risulta $2<2\sqrt{2}$ si deduce che avrà con l'ellisse un secondo punto in comune nel primo quadrante.

4.3 **Falsa** Per la giustificazione vedere quanto affermato nel precedente punto 4.2.

4.4 **Falsa** Esistono due rette t_1, t_2 parallele alla retta s che sono tangenti all'ellisse e tutte le rette esterne alla striscia determinata dalle rette t_1, t_2 non hanno punti in comune con l'ellisse, mentre sono secanti l'ellisse tutte le rette parallele alla retta s che sono interne alla striscia determinata dalle rette t_1, t_2.

5) Dopo aver determinato le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $E: 2x^2 + y^2 = 8$ parallele alle bisettrici dei quadranti valutare il valore di verità delle seguenti affermazioni

5.1 Le equazioni delle quattro tangenti sono

$t_1: y = x + 2\sqrt{3}$ $\quad$ $t_2: y = x - 2\sqrt{3}$

$t_3: y = -x + 2\sqrt{3}$ $\quad$ $t_4: y = -x - 2\sqrt{3}$ V F

5.2 Le rette $t_1: y = x + 2\sqrt{3}$, $t_3: y = -x + 2\sqrt{3}$ sono tra loro perpendicolari e si intersecano in un punto di ascissa positiva.

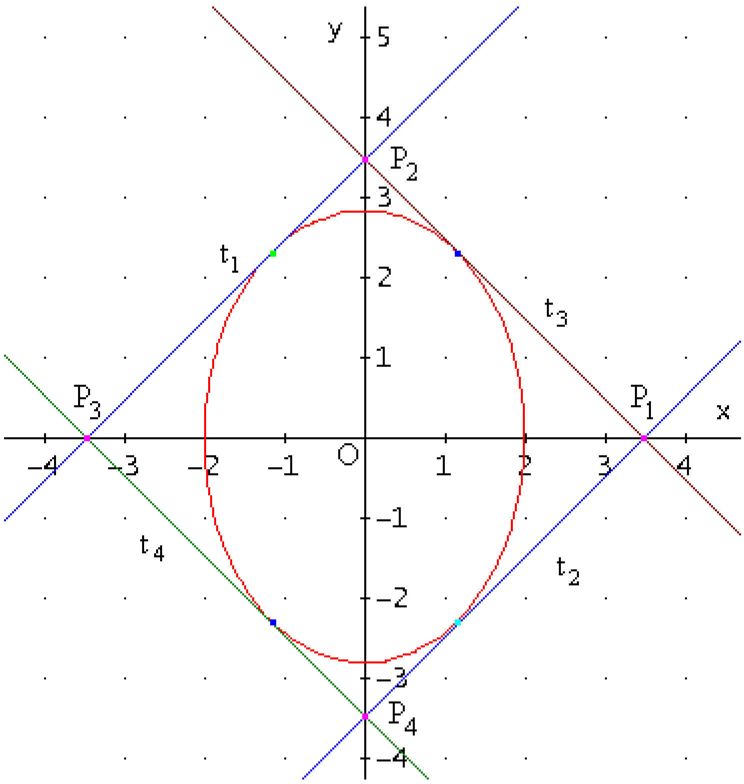
5.3 Le rette t_1, t_2, t_3, t_4 determinano un quadrato in cui è inscritta l'ellisse ed il perimetro del quadrato misura $8\sqrt{6}$.

Risposte

5.1 **Vera** Effettivamente le rette tangenti all'ellisse parallele alle bisettrici dei quadranti sono quelle indicate (osservare la figura che segue).

5.2 **Falsa** Le rette $t_1: y = x + 2\sqrt{3}$, $t_3: y = -x + 2\sqrt{3}$ sono tra loro perpendicolari ma si intersecano nel punto $P_2\left(0; 2\sqrt{3}\right)$ che ha ascissa nulla.

5.3 **Vera** Le rette tangenti t_1, t_2, t_3, t_4 delimitano effettivamente un quadrato i cui vertici sono: $P_1\left(2\sqrt{3};0\right)$, $P_2\left(0;2\sqrt{3}\right)$, $P_3\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $P_4\left(0;-2\sqrt{3}\right)$. Infatti il quadrilatero ha gli angoli retti, dunque è un rettangolo ed i lati sono anche congruenti, come si verifica immediatamente calcolandone la misura; risulta: $l = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ $= \sqrt{2\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$. Pertanto il perimetro misura $4l = 8\sqrt{6}$.



6) Di seguito sono indicate le equazioni di alcune ellissi. Di esse solo due hanno gli assi dei quali uno ha misura uguale alla metà della misura dell'altro. Indica la risposta esatta.

a) $x^2+4y^2=4$ b) $x^2+2y^2=10$ c) $x^2+4y^2=16$

d) $2x^2+y^2=12$ e) $2x^2+y^2=2$

6.1 a) e b)
6.2 b) e c)
6.3 a) ed e)
6.4 a) e c)

Risposta

La risposta esatta è la **6.4**. Infatti per l'ellisse **a)** il semiasse maggiore misura 2 ed il semiasse minore misura 1. L'ellisse **c)** ha il semiasse minore di misura 2 ed il semiasse maggiore di misura 4. Le altre tre ellissi non hanno questa proprietà.

7) Se due ellissi hanno la stessa eccentricità ed uguale la misura dell'asse minore o uguale la misura dell'asse maggiore hanno necessariamente uguale anche la misura del secondo asse?

SI NO

Risposta

La risposta corretta è **SI**. Dimostriamolo.

Esaminiamo i casi

7.1 Le due ellissi abbiano entrambe i fuochi sull'asse delle ascisse ed uguale la misura dell'asse maggiore.

7.2 Le due ellissi abbiano entrambe i fuochi sull'asse delle ascisse ed uguali la misura dell'asse minore.

7.3 Delle due ellissi una ha i fuochi sull'asse delle ascisse e l'altra sull'asse delle ordinate ed hanno uguali i rispettivi assi maggiori.

7.4 Delle due ellissi una ha i fuochi sull'asse delle ascisse, l'altra sull'asse delle ordinate ed hanno uguali i rispettivi assi minori.

Soluzione

Supponiamo che le equazioni delle due ellissi siano le seguenti

$$E_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\qquad E_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$$

Analizziamo i diversi casi

7.1 In questo caso risulta $a_1=a_2=a$; i fuochi di E_1 sono $F_1(c_1;0)$, $F_2(-c_1;0)$, con $c_1=\sqrt{a^2-b_1^2}$; i fuochi di E_2 sono $F'_1(c_2;0)$, $F'_2(-c_2;0)$, con $c_2=\sqrt{a^2-b_2^2}$.

Dalla definizione di eccentricità

$$e_1=\frac{c_1}{a},\ e_2=\frac{c_2}{a},$$

e dall'uguaglianza $e_1=e_2\Rightarrow\frac{c_1}{a}=\frac{c_2}{a}\Rightarrow c_1=c_2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-b_1^2}=\sqrt{a^2-b_2^2}\Rightarrow$

$b_1=b_2$ quindi è uguale anche la misura del secondo semiasse, ed in definitiva anche del secondo asse delle due curve.

7.2 In questo caso risulta $b_1 = b_2 = b$. I fuochi di E_1 sono $F_1(c_1;0)$, $F_2(-c_1;0)$, con $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b^2}$;i fuochi di E_2 sono $F'_1(c_2;0)$, $F'_2(-c_2;0)$, con $c_2 = \sqrt{a_2^2 - b^2}$.
Dalla definizione di eccentricità e dall'uguaglianza supposta ricaviamo

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1}, e_2 = \frac{c_2}{a_2}$$

$$e_1 = e_2 \Rightarrow \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_1^2 - b^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{a_2^2 - b^2}}{a_2} \Rightarrow a_2\sqrt{a_1^2 - b^2} = a_1\sqrt{a_2^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$a_2^2\left(a_1^2 - b^2\right) = a_1^2\left(a_2^2 - b^2\right) \Rightarrow -a_2^2 b^2 = -a_1^2 b^2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Anche in questo caso gli altri due semiassi sono uguali.

7.3 Supponiamo che l'ellisse E_1 abbia i fuochi sull'asse delle ascisse e che l'ellisse E_2 abbia i fuochi sull'asse delle ordinate, dunque risulta $a_1>b_1$ e $a_2<b_2$. Sappiamo dunque che $a_1=b_2$. Vogliamo provare che dall'uguaglianza dell'eccentricità segue ancora l'uguaglianza dei due assi minori, cioè che risulta $b_1=a_2$.
Osserviamo che si ha:

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}\,; \qquad c_2 = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}\,; \qquad a_1 = b_2 \Rightarrow$$

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{a_1};\ e_2 = \frac{c_2}{b_2} = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{b_2} = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{a_1};$$

$$e_1 = e_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{a_1} \Rightarrow \sqrt{b_2^2 - b_1^2} = \sqrt{b_2^2 - a_2^2} \Rightarrow b_1 = a_2.$$

Quindi anche il semiasse minore dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse delle ascisse è uguale al semiasse minore dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse delle ordinate.

7.4 Supponiamo ancora che l'ellisse E_1 abbia i fuochi sull'asse delle ascisse e che l'ellisse E_2 abbia i fuochi sull'asse delle ordinate, dunque risulta $a_1>b_1$ e $a_2<b_2$; con l'ipotesi che $b_1=a_2$ e l'uguaglianza delle eccentricità vogliamo provare che sono uguali anche le misure dei semiassi maggiori, cioè che risulta $a_1=b_2$. Osserviamo che:

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} \text{ e } e_2 = \frac{c_2}{b_2} = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{b_2};$$

$$\left(b_1 = a_2\right) \wedge \left(e_1 = e_2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_2} \Rightarrow$$

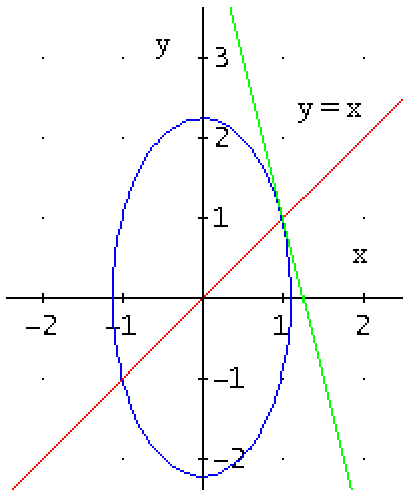
$$b_2\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = a_1\sqrt{b_2^2 - b_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{a_1^2 b_2^2} - b_2^2 b_1^2 = \cancel{a_1^2 b_2^2} - a_1^2 b_1^2 \Rightarrow b_2^2 b_1^2 = a_1^2 b_1^2 \Rightarrow$$

$$a_1 = b_2$$

La tesi è acquisita.

8) Data l'ellisse di equazione $E: 4x^2 + y^2 = 5$ e la retta $t: 4x + y = 5$ verificare che la retta è tangente all'ellisse determinare le coordinate del punto di contatto.



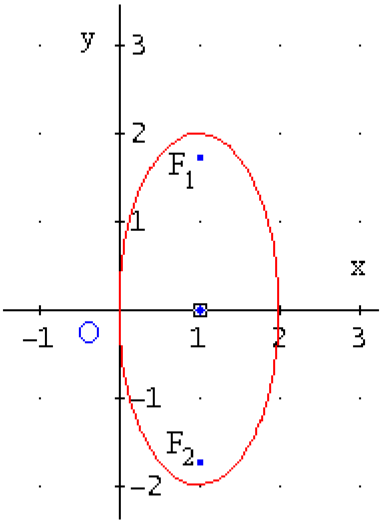
Risposta

La retta è effettivamente tangente all'ellisse come si deduce risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases}4x^2+y^2=5\\4x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2+(5-4x)^2=5\\4x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2=1\\y_1=y_2=1\end{cases}$$

Il punto di contatto è A(1;1)

9) Data l'ellisse $E:(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ trovare le coordinate del centro C, le misure dei semiassi *a*, *b* ed il valore dell'eccentricità selezionando la risposta esatta tra quelle proposte:



9.1 C(1;0), a=1, b=2, $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9.2 C(1;0), a=1, b=2, $e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

9.3 C(1;0), a=1, b=2, $e=\dfrac{1}{2}$

Risposta

La risposta esatta è la (9.1). Osservare la figura a lato.

10) Stabilire per quali valori del parametro m l'equazione

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{3-m}=1$$

può rappresentare un'ellisse nel piano cartesiano. Indicare la risposta esatta fra quelle proposte.

10.1 Per ogni valore di m diverso da zero e da tre

10.2 Per ogni valore di m dell'intervallo]0;3[

10.3 Per ogni valore reale minore di tre e diverso da zero

Risposta

La risposta esatta è la (10.3).

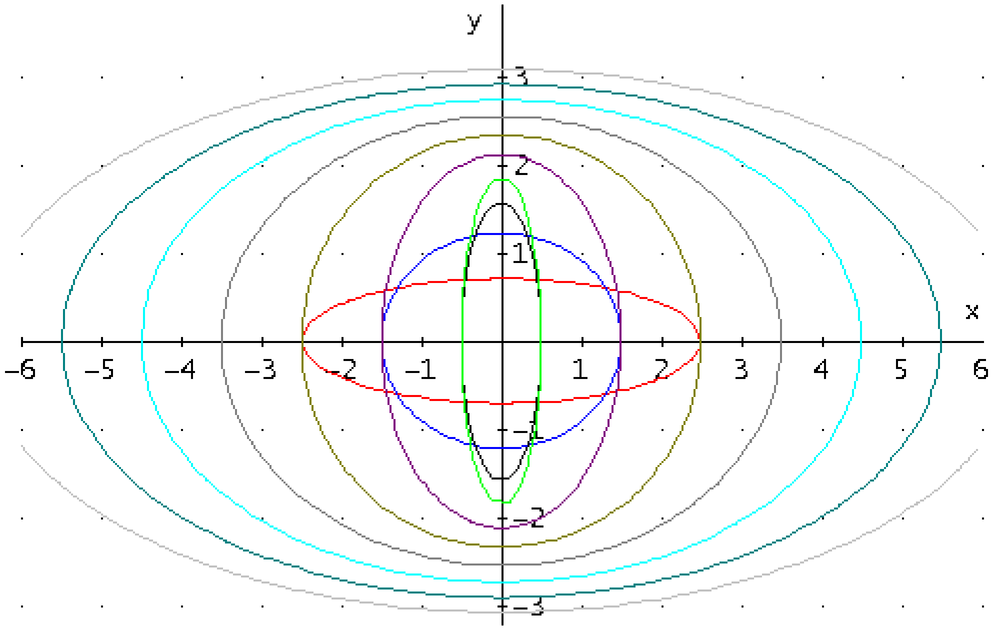
La (10.1) è errata perché con m>3 il denominatore di y^2 è negativo e ciò non è ammesso.

La (10.2) è errata perché sono accettabili anche valori negatovi del parametro.

Nota

Nella figura che segue sono riportate le dieci ellissi corrispondenti ai valori del parametro appartenenti al seguente insieme numerico

$$\{2,5;1,5;0,5;-0,5;-1,5;-2,5;-3,5;-4,5;-5,5;-6,5\}$$



11) Considerata l’equazione della famiglia di ellissi

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2+2}=1$$

Dimostrare che al variare del parametro m esiste solo un valore reale per m^2 per il quale si ottiene un’ellisse che passa per il punto $P\left(1;\sqrt{2}\right)$.

Soluzione

Imponendo il passaggio della curva dal punto $P\left(1;\sqrt{2}\right)$ si ottiene la seguente equazione

$$\frac{1}{m^2}+\frac{2}{m^2+2}=1\Rightarrow$$

$$m^4-m^2-2=0$$

Si tratta di un’equazione biquadratica che risolviamo ponendo $m^2=t\Rightarrow$

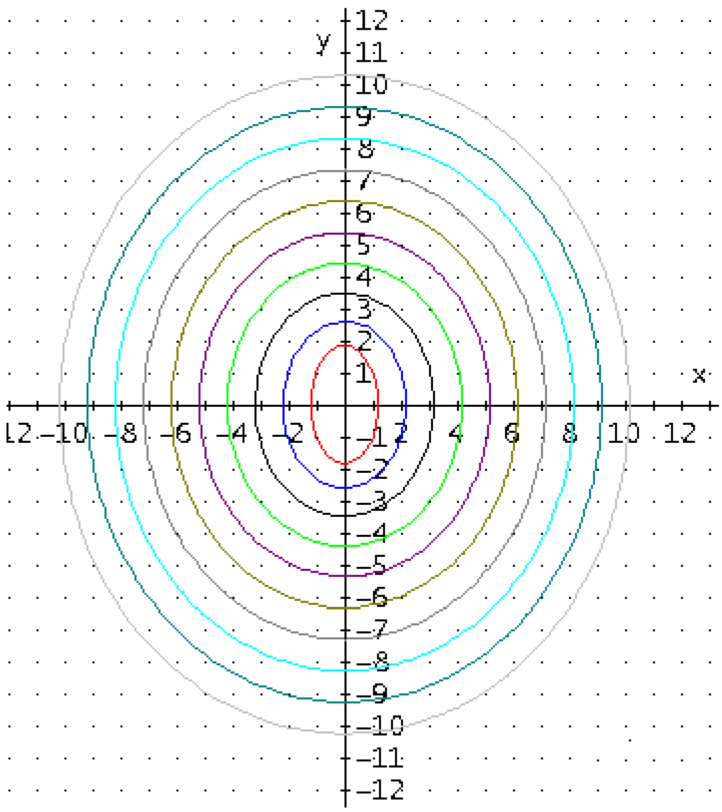
$$t^2-t-2=0\Rightarrow t_1=-1;t_2=2$$

Il valore $t_1=-1$ non è accettabile perché negativo; rimane

$$t_2=2\Rightarrow m^2=2$$

L’equazione dell’ellisse richiesta è

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$



Nella figura a lato sono rappresentate dieci ellissi della famiglia; quella più interna, di colore rosso, è l’ellisse che verifica la richiesta del quesito. Le dieci equazioni sono state ottenute applicando la funzione VECTOR di Derive nella seguente forma

(VECTOR(x^2/m^2 + y^2/(m^2 + 2) = 1, m, √(√2), 11, 1))
Il simbolo √ indica la radice quadrata.

12) Considerata l’equazione del fascio di curve $F: x^2 + (2-k)y^2 = k+1$ stabilire per quali valori del parametro k si ottengono ellissi con i fuochi sull’asse delle ascisse.

Soluzione

L’equazione del fascio rappresenta ellissi se e solo se sono positivi il coefficiente di y^2 ed il termine noto. I valori richiesti sono perciò le soluzioni del seguente sistema

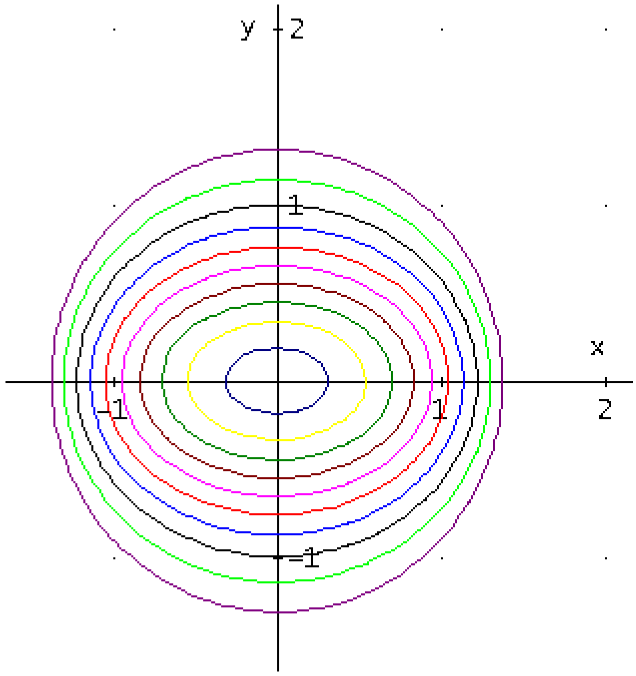
$$\begin{cases} 2-k>0 \\ k+1>0 \end{cases} \Rightarrow -1<k<2$$

Volendo ottenere ellissi con i fuochi sull’asse delle ascisse è opportuno scrivere l’equazione del fascio di ellissi in forma canonica

$$F: \frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{\frac{k+1}{2-k}} = 1$$

dalla quale si riconosce che si ottengono ellissi con la proprietà descritta se è soddisfatta la condizione

$$k+1 > \frac{k+1}{2-k} \Rightarrow k<1$$



In figura sono riportate dieci curve che verificano le condizioni richieste. Anche in questo caso sono state ottenute con l’applicazione Derive. Il comando perla generazione delle equazioni è il seguente:
(VECTOR(x^2 + (2-k)y^2 = k+1, k,-0.9,1,0.2))

13) Considerata l’ellisse di equazione

$$E: 4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 7 = 0$$

scrivere le equazioni della traslazione τ che permettono il passaggio dal sistema di riferimento cartesiano *x*Oy al sistema di riferimento cartesiano XO′Y, avente come origine O′ il centro dell’ellisse, come assi coordinati le rette O′X, O′Y parallele e concordi agli assi Ox, Oy. Scrivere l’equazione dell’ellisse nel riferimento XO′Y e determinare le misure dei semiassi, le coordinate dei fuochi ed il valore dell’eccentricità.

Soluzione

L’equazione in esame corrisponde all’equazione di un’ellisse traslata rispetto al sistema di riferimento dei suoi assi.

Indicando con $(x_{O'}; y_{O'})$ le coordinate del centro O′ dell’ellisse nel riferimento *x*Oy , le equazioni della traslazione richiesta sono del tipo:

$$\tau: \begin{cases} x_P = X_P + x_{O'} \\ y_P = Y_P + y_{O'} \end{cases} \qquad (13.1)$$

Le (13.1) indicano chiaramente che se sono note le coordinate $(X_P; Y_P)$ del generico punto P nel riferimento XO′Y si determinano le coordinate $(x_P; y_P)$ dello stesso punto nel riferimento *x*Oy . Le equazioni della traslazione richiesta sono però le infverse delle (13.1). Cioè

$$\tau^{-1}:\begin{cases}X_P = x_P - x_{O'}\\ Y_P = y_P - y_{O'}\end{cases} \qquad (13.2)$$

Dobbiamo dunque determinare le coordinate $(x_{O'};y_{O'})$. Ciò è possibile farlo in due modi:

- elaborando algebricamente l’equazione dell’ellisse per ricondurla alla forma
$E:\dfrac{(x-x_{O'})^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_{O'})^2}{b^2}=1$;
- oppure sostituendo le (13.1) nell’equazione cartesiana della curva nel riferimento xOy ed imporre che siano nulli i coefficienti dei termini di primo grado in X ed Y.

Seguiamo la seconda strada.

$$E:4x^2+3y^2+16x-6y+7=0$$

Effettuando le sostituzioni (13.1) otteniamo

$$E:4(X+x_{O'})^2+3(Y+y_{O'})^2+16(X+x_{O'})-6(Y+y_{O'})+7=0$$

$$E:4X^2+8Xx_{O'}+4x_{O'}^2+3Y^2+6Yy_{O'}+3y_{O'}^2+16X+16x_{O'}-6Y-6y_{O'}+7=0$$

Riordinando l’equazione si ottiene la forma

$$E:4X^2+3Y^2+8(x_{O'}+2)X-6(y_{O'}-1)Y+4x_{O'}^2+3y_{O'}^2+16x_{O'}-16y_{O'}+7=0$$

Imponiamo che siano nulli i coefficienti dei termini di primo grado in X, Y $\Rightarrow$

$$x_{O'}+2=0\wedge y_{O'}-1=0\Rightarrow x_{O'}=-2;y_{O'}=1$$

Conclusione

Le equazioni (13.2) richieste della traslazione τ^{-1} sono

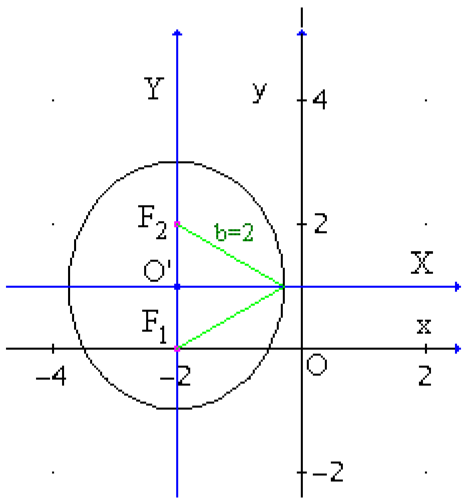
$$\tau^{-1}:\begin{cases}X=x+2\\ Y=y-1\end{cases}$$

Sostituendo i valori $x_{O'}=-2;y_{O'}=1$ nell’equazione dell’ellisse e semplificando si ricava

$$E:4X^2+3Y^2+16+3-32-16+7=0\Leftrightarrow$$

$$E:4X^2+3Y^2=12\Leftrightarrow$$

$$E:\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{4}=1$$



I fuochi dell’ellisse sono i punti $F_1(-2;0)$, $F_2(-2;2)$ ed il valore dell’eccentricità è

$$e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$$

Risposte	
Equazioni della traslazione	$\tau : \begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$
Equazione dell'ellisse riferita ai propri assi	$E : \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{4} = 1$
Misure dei semiassi	$a = \sqrt{3}$, $b = 2$
Coordinate dei fuochi	$F_1(-2;0)$, $F_2(-2;2)$
Valore dell'eccentricità	$e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$