Geometria analitica

Problemi sull'ellisse

Problema_1

Considerata l'equazione del fascio di curve $F: mx^2+(m-2)y^2=3-m$, con m parametro reale risolvere i seguenti quesiti.

1.1 Determinare per quali valori del parametro l'equazione rappresenta ellissi nel piano cartesiano xOy.

1.2 Per i valori reali di m trovati nel precedente punto precisare le caratteristiche delle curve e determinare le misure degli assi ed il valore dell'eccentricità.

1.3 Determinare l'equazione dell'ellisse avente eccentricità $e=2/\sqrt{5}$, trovare le coordinate dei fuochi e rappresentarla nel riferimento cartesiano.

Soluzione

1.1 Si ottengono ellissi solo per valori del parametro m appartenenti all'intervallo]2;3[.

1.2 L'equazione parametrica rappresenta ellissi aventi gli assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati; le misure dei semiassi sono $a=\sqrt{\frac{3-m}{m}}$, $b=\sqrt{\frac{3-m}{m-2}}$. Confrontando i valori dei semiassi si stabilisce la posizione dei fuochi. Si nota che per i valori del parametro m consentiti è soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{3-m}{m-2}>\frac{3-m}{m} \Leftrightarrow m>m-2$$

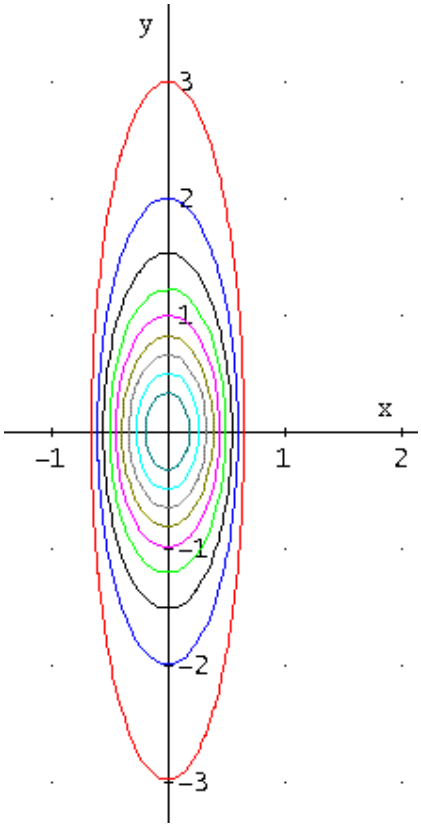
per cui i fuochi si trovano sull'asse delle ordinate.

Calcolo dell'eccentricità

In riferimento all'equazione del fascio di ellissi scritta in forma canonica, $F: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con a e b definiti sopra, il valore della semidistanza focale è

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{\frac{3-m}{m-2}-\frac{3-m}{m}}=\sqrt{\frac{2(3-m)}{m(m-2)}}$$

ed il valore dell'eccentricità è $e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{2}{m}}$.



1.3 Il valore del parametro m relativo all'ellisse di eccentricità $e=2/\sqrt{5}$ si ricava risolvendo la seguente equazione

$$\sqrt{\frac{2}{m}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow m=\frac{5}{2};$$

l'equazione dell'ellisse corrispondente è

$E: 5x^2+y^2=1$.

Nella figura a lato sono rappresentate nove ellissi, ottenute per i valori 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; l'ellisse di eccentricità $e=2/\sqrt{5}$ è quella centrale (in colore fucsia).

I fuochi sono i punti $F_1\left(0;\frac{2}{\sqrt{5}}\right), F_2\left(0;-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Problema_2

Si consideri nel piano riferito al sistema di coordinate cartesiane xOy l'equazione

$$x^2+4y^2+2x-12y+6=0$$

2.1 Dopo averla elaborata algebricamente riconoscere che rappresenta un'ellisse avente gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati.

2.2 Determinare le coordinate del centro, le misure degli assi, le coordinate dei fuochi ed il valore dell'eccentricità della curva. Rappresentare la curva nel riferimento cartesiano.

3.1.1 Indicati con A e B i punti di intersezione dell'ellisse con l'asse delle ordinate, determinare le coordinate dei vertici C, D del rettangolo ABCD inscritto nell'ellisse. Determinare il perimetro del rettangolo.

Soluzione

2.1 Elaborando algebricamente l'equazione si ha:

$$E:(x+1)^2+(2y-3)^2=4;$$

$$E:\frac{(x+1)^2}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$$

Dall'equazione ottenuta si deduce che rappresenta un'ellisse avente per assi di simmetria le rette

$$a_1:x+1=0,\quad a_2:y-\frac{1}{2}=0$$

che sono parallele agli assi coordinati.

2.2 Il centro di simmetria della curva è il punto $O'\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. Le misure degli assi sono $2a$=4, $2b$=2. L'asse focale è parallelo all'asse delle ascisse.

Coordinate dei fuochi

I fuochi F_1, F_2 si trovano sull'asse parallelo all'asse delle ascisse.

Dall'equazione canonica si ricava la misura della semidistanza focale:

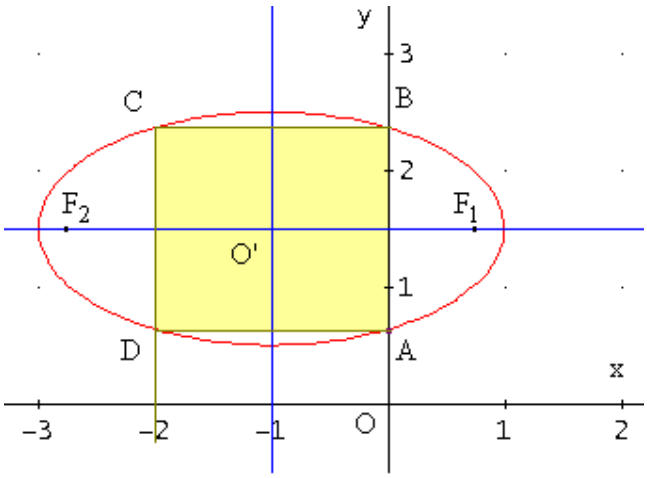
$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$. I fuochi sono

$F_1\left(-1+\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(-1-\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$.

Il valore dell'eccentricità è

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ellisse è rappresentata nella figura a lato.



2.3 Le coordinate dei punti A, B si determinano ponendo x=0 nell'equazione della curva. I punti sono $A\left(0;\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(0;\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$. Gli altri due vertici del rettangolo ABCD inscritto nell'ellisse si determinano sfruttando le proprietà di simmetria dell'ellisse; non sono necessarie altre elaborazioni

algebriche. In relazione alla figura riportata si ha: $C\left(-2;\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-2;\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. Il perimetro del rettangolo vale:

$2p(ABCD) = 2\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = 2\left(\sqrt{3}+2\right)$