Problema sull'ellisse

Considerata l'ellisse di equazione $E: 5x^2 + 9y^2 = 45$ la si rappresenti nel riferimento cartesiano xOy quindi, detto A il vertice di ascissa positiva, si scriva l'equazione della retta s condotta per A ed avente coefficiente angolare m=-1/2 e si determinino le coordinate dell'ulteriore punto B che tale retta ha in comune con l'ellisse.

Dimostrare che esistono due soli triangoli isosceli inscritti nell'ellisse che hanno la corda AB come base; siano C, C' i terzi vertici di detti triangoli. Determinare l'area del quadrilatero ACBC'.

Soluzione

L'equazione dell'ellisse scritta in forma canonica è

$$E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Dalla quale si riconosce che i fuochi sono $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$ ed i vertici i punti $V_1(3;0)$, $V_2(-3;0)$, $V_3\left(0;\sqrt{5}\right)$, $V_4\left(0;-\sqrt{5}\right)$. Il punto A indicato nel testo coincide con il vertice V_1.

Equazione della retta s

La retta ***s*** passa per il punto A(3;0) ed ha coefficiente angolare m=-1/2 e quindi la sua equazione è

$$s: y = -\frac{1}{2}(x-3)$$

Per trovare le coordinate del secondo punto B che **s** ha in comune con l'ellisse si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

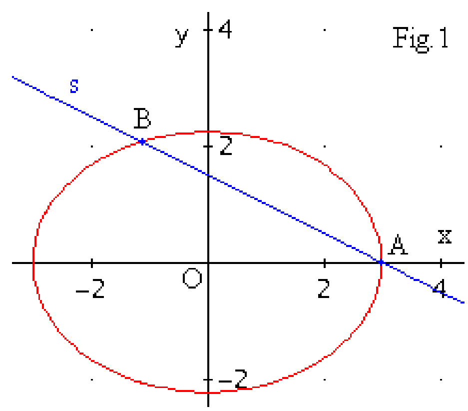
$$\begin{cases} s: y = -\frac{1}{2}(x-3) \\ E: 5x^2 + 9y^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s: y = -\frac{1}{2}(x-3) \\ 29x^2 - 54x - 99 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2^1 = \frac{27 \pm \sqrt{3600}}{29} = \frac{27 \pm 60}{29} \Rightarrow$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow \; y_1 = -\frac{1}{2}(3-3) = 0 \Rightarrow \quad A(3;0);$$

$$x_2 = -\frac{33}{29} \Rightarrow \; y_2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{33}{29} - 3\right) = \frac{60}{29}$$

$$\Rightarrow B\left(-\frac{33}{29}; \frac{60}{29}\right)$$



In Fig.1 è rappresentata l'ellisse ***E***, la retta ***s*** ed i due punti A, B.

Triangoli isosceli inscritti

I triangoli isosceli inscritti nell'ellisse ed aventi come base la corda AB sono due ed i loro vertici sono i punti d'intersezione dell'asse del segmento AB con l'ellisse.
Indicando con ***n*** il suddetto asse, per determinarne l'equazione basta trovare il punto medio M del segmento AB e tener conto che per la condizione di perpendicolarità tra rette il coefficiente angolare della retta ***n*** è l'antireciproco del coefficiente angolare della retta s.

Il punto medio M ha coordinate

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{33}{29}\right)=\frac{27}{29};$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{60}{29}\right)=\frac{30}{29}$$

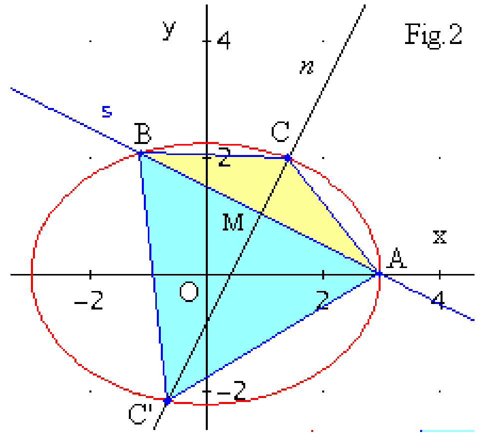


Fig.2

L'equazione della retta ***n*** è

$$n: y-\frac{30}{29}=2\left(x-\frac{27}{29}\right)$$

Risolvendo il sistema composto dall' equazione della retta ***n*** e da quella dell'ellisse si trovano le coordinate dei vertici richiesti C, C'.

$$\begin{cases} n: y=2x-\dfrac{24}{29} \\ E: 5x^2+9y^2=45 \end{cases}$$

Si trova come equazione risolvente $41x^2-\frac{864}{29}x-\frac{32661}{292}=0$

ed i valori approssimati delle due radici sono x_1= -0,67553 , x_2=1,40219 ai quali corrispondono rispettivamente le ordinate y_1= -2,11786 , y_2= 1,97699. In definitiva i due punti comuni all'ellisse ed alla retta ***n*** sono C (1,40219; 1,97699), C'(-0,67553; -2,11786).

Area del quadrilatero ACBC'

Il quadrilatero ha le diagonali perpendicolari per cui la sua area è data dal semiprodotto delle misure delle stesse.

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(3+\frac{33}{29}\right)^2+\left(\frac{60}{29}\right)^2}=\frac{60}{29}\sqrt{5}$$

$$\overline{CC'}\simeq 4,646$$

$$Area(ACBC')=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC'}}{2}\simeq 10,747$$

Elaborazioni con Excel per le radici dell'equazione ed il calcolo dell'area del quadrilatero ACBC'			
Equazione di secondo grado			
a	41		
b	-29,79310345		
c	-38,83590963		
discriminante	7256,718193		
Radice (discriminante)	85,18637328		
Valori radici		Ordinate dei punti C, C'	
x_1	-0,675527681	y1	-2,17864157
x_2	1,402188741	y2	1,976791274
Retta	n:y=2x-24/29		
Misure delle diagonali			
AB=	4,62634754		
CC'=	4,645915156		
Area(ACBC')	10,74680908		