Ellissi traslate

In un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane xOy sono date le equazioni delle curve che seguono. Dopo aver scritto le stesse in forma canonica, determinare le coordinate del centro, dei vertici , dei fuochi, il valore dell'eccentricità. Rappresentare le curve corrispondenti.

1) $4x^2+y^2+8x-4y+4=0$ Centro $C(-1;2)$, Vertici: $V_1(0;2), V_2(-2;2)$;...
2) $4x^2+16y^2-4x-32y+1=0$
3) $x^2+9y^2+6x+4y=0$ $V_1\left(-3+\frac{\sqrt{85}}{3};-\frac{2}{9}\right)$, $V_2\left(-3-\frac{\sqrt{85}}{3};-\frac{2}{9}\right)$; $V_3\left(-3;-\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{85}}{9}\right)$; $V_4\left(-3;-\frac{2}{9}-\frac{\sqrt{85}}{9}\right)$
4) $4x^2+y^2-12x-6y+9=0$ Fuochi: $F_1\left(\frac{3}{2};3+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right), F_2\left(\frac{3}{2};3-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
5) $y-2=2\sqrt{8x-2x^2}$ L'equazione è definita per i punti del piano cartesiano le cui coordinate verificano le limitazioni $\begin{cases} y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

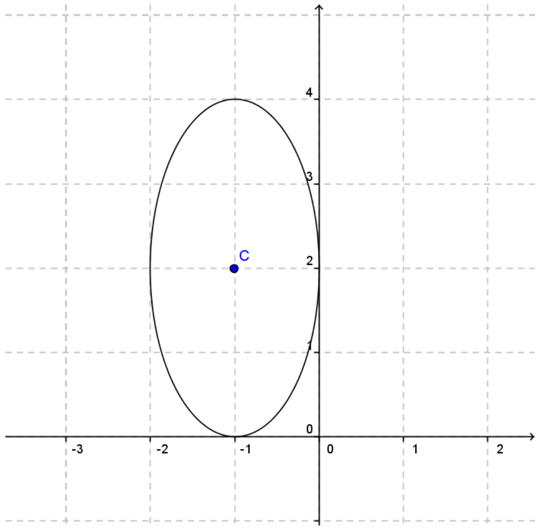
Vai alla soluzione

Soluzione

1) $4x^2+y^2+8x-4y+4=0$

Si tratta dell'equazione di un'ellisse traslata la cui equazione canonica è

$$(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$



Dall'equazione canonica si deducono immediatamente le coordinate del centro, dei vertici, dei fuochi e il valore dell'eccentricità che riportiamo di seguito.

Centro: $C(-1;2)$;

Vertici: $V_1(0;2), V_2(-2;2), V_3(-1;4), V_4(-1;0)$

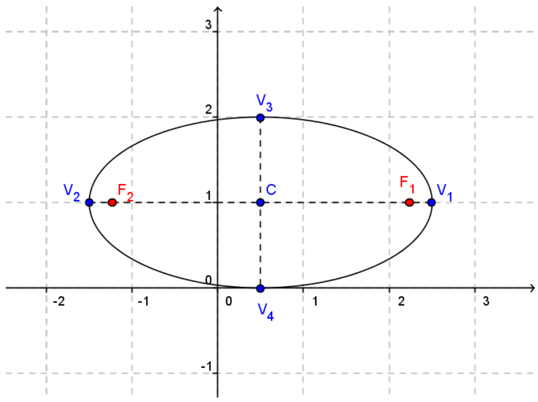
Fuochi: $F_1\left(-1;2+\sqrt{3}\right), F_2\left(-1;2-\sqrt{3}\right)$

Eccentricità: $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $4x^2+16y^2-4x-32y+1=0$

L'equazione rappresenta un'ellisse traslata rispetto agli assi cartesiani. Raggruppando i termini in x e quelli in y e procedendo con il metodo del completamento del quadrato si riesce a individuare la somma dei quadrati di due binomi. Seguono in sintesi le elaborazioni che permettono di ottenere la forma canonica dell'equazione della curva.

$$4\left(x^2-x\right)+16\left(y^2-2y\right)+1=0\rightarrow$$
$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+16\left(y^2-2y+1-1\right)+1=0\rightarrow$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1+16(y-1)^2-16+1=0\rightarrow$$
$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$



L'ellisse ha i come centro il punto $C\left(\frac{1}{2};1\right)$ con i fuochi sull'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse. I vertici sono $V_1\left(\frac{5}{2};1\right), V_2\left(-\frac{3}{2};1\right)$, $V_3\left(\frac{1}{2};2\right), V_4\left(\frac{1}{2};0\right)$; i fuochi sono $F_1\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3};1\right), F_2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3};1\right)$. L'eccentricità della curva vale $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

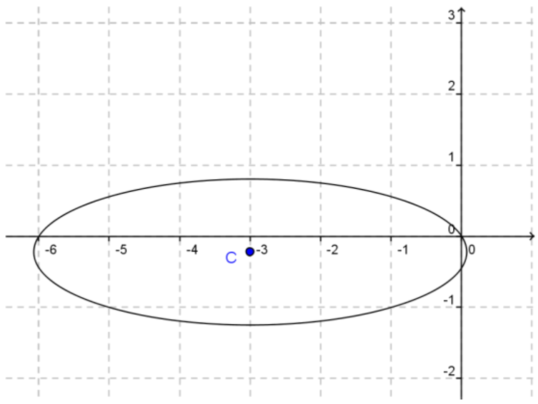
3) $x^2+9y^2+6x+4y=0$

L'equazione rappresenta un'ellisse traslata rispetto agli assi e passa per l'origine O. Trasformando l'equazione riducendola alla forma canonica si ottiene

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{85}{9}}+\frac{\left(y+\frac{2}{9}\right)^2}{\frac{85}{81}}=1$$

Dati caratteristici

Centro $C\left(-3;-\frac{2}{9}\right)$;



Vertici $V_1\left(-3+\frac{\sqrt{85}}{3};-\frac{2}{9}\right)$, $V_2\left(-3-\frac{\sqrt{85}}{3};-\frac{2}{9}\right)$;

$V_3\left(-3;-\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{85}}{9}\right)$; $V_4\left(-3;-\frac{2}{9}-\frac{\sqrt{85}}{9}\right)$.

Fuochi $F_1\left(-3+\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{2}{9}\right)$, $F_2\left(-3-\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{2}{9}\right)$.

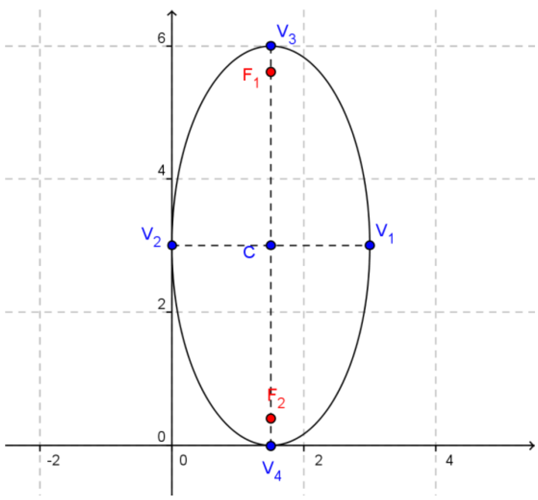
Eccentricità

Con $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{2}{9}\sqrt{170}$, risulta $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4) $4x^2+y^2-12x-6y+9=0$

Riducendo l'equazione alla forma canonica si ottiene

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$



Si tratta di un'ellisse traslata di cui riportiamo gli elementi caratteristici.

Centro $C\left(\frac{3}{2};3\right)$. Vertici $V_1(3;3), V_2(0;3)$,

$V_3\left(\frac{3}{2};6\right), V_4\left(\frac{3}{2};0\right)$.

Fuochi

Con $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\rightarrow F_1\left(\frac{3}{2};3+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right), F_2\left(\frac{3}{2};3-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

Eccentricità $\quad e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $y-2=2\sqrt{8x-2x^2}$

a) Osserviamo che l'equazione ha senso per i valori reali delle variabili x, y che verificano il seguente sistema (condizioni di realtà della curva λ corrispondente)

$$\begin{cases} y-2\geq 0 \\ 8x-2x^2\geq 0 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} y\geq 2 \\ 0\leq x\leq 4 \end{cases}.$$

b) Nel rispetto delle condizioni precedenti si può trasformare l'equazione come segue

$$(y-2)^2=\left(2\sqrt{8x-2x^2}\right)^2 \to \frac{(y-2)^2}{4}=8x-2x^2 \to 2\left(x^2-4x\right)+\frac{(y-2)^2}{4}=0 \to$$
$$2\left(x^2-4x+4-4\right)+\frac{(y-2)^2}{4}=0 \to (x-2)^2+\frac{(y-2)^2}{8}=4 \to \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{32}=1.$$

L'equazione ottenuta rappresenta un'ellisse traslata rispetto agli assi cartesiani, il cui centro è C(2;2). Di detta ellisse la curva λ corrispondente all'equazione algebrica $y-2=2\sqrt{8x-2x^2}$ è solo la parte ricadente nella regione piana i cui punti hanno coordinate (x;y) che verificano le limitazioni indicate nel precedente punto a).

Vertici dell'ellisse $\quad V_1(4;2), V_2(0;2);\ V_3\left(2;2+4\sqrt{2}\right), V_4\left(2;2-4\sqrt{2}\right)$.

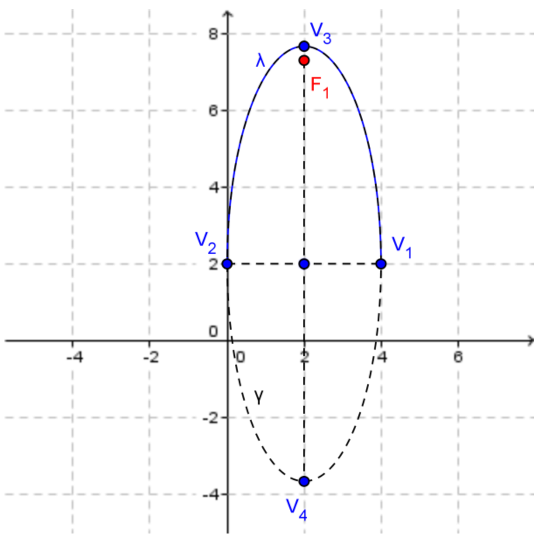
Dei quattro vertici indicati, il vertice V_4 non appartiene alla curva λ.

Fuochi

I fuochi si trovano sull'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

Con $c=\sqrt{b^2-a^2}=2\sqrt{7}$, risulta $F_1\left(2;2+2\sqrt{7}\right), F_2\left(2;2-2\sqrt{7}\right)$. Dei due fuochi solo F_1 appartiene alla regione piana in cui si trova la curva λ.

Eccentricità dell'ellisse $e=\frac{c}{b}=\frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.



Il diagramma della curva è riportato a lato ed è l'arco indicato con tratto continuo. Con stile tratteggio è rappresentata la seconda parte dell'ellisse complementare della curva λ.