Curve deducibili dall'ellisse

Rappresentare le curve le cui equazioni cartesiane sono

1) $y = 3 - \sqrt{4x - 4x^2}$
2) $y = 3 - \sqrt{4|x| - 4x^2}$
3) $2 - y = \sqrt{4x - 2x^2}$

Soluzione

1) Scriviamo l'equazione nella forma equivalente isolando il radicale

$$\sqrt{4x - 4x^2} = 3 - y$$

Questa forma permette di riconoscere che la curva corrispondente ha i punti le cui coordinate cartesiane verificano il seguente sistema

$\begin{cases} 4x - 4x^2 \geq 0 \\ 3 - y \geq 0 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y \leq 3 \end{cases}$; il dominio di realtà della curva è un rettangolo.

Per riconoscere il tipo di curva liberiamo l'equazione dalla presenza del radicale elevando al quadrato ambo i membri.

$4x - 4x^2 = (3 - y)^2$, da cui $(3 - y)^2 + 4x^2 - 4x = 0$, che si trasforma come segue

$4x^2 - 4x + 1 - 1 + (y - 3)^2 = 0$ e ancora $(2x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

Scritta l'equazione nella forma canonica

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + (y - 3)^2 = 1$$

si riconosce che essa rappresenta un'ellisse traslata rispetto agli assi cartesiani avente come centro il punto $C\left(\frac{1}{2}; 3\right)$, semiassi $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Essendo $b>a$ l'ellisse ha i fuochi sulla retta $x = \frac{1}{2}$ ed i suoi vertici sono

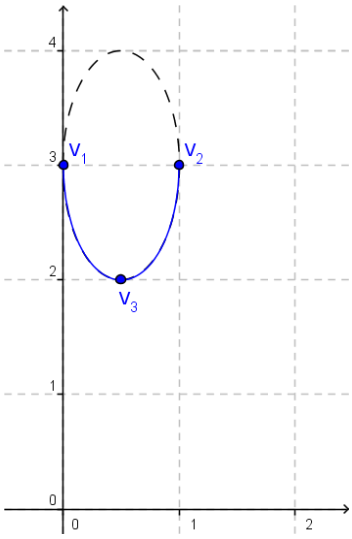

Figura 1

$V_1(0;3), V_2(1;3), V_3\left(\frac{1}{2};2\right)$, $V_3\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Dell'ellisse suddetta solo la semiellisse che appartiene al semipiano $y \le 3$ rappresenta la curva avente l'equazione in esame. In Figura 1 vi è la rappresentazione.

2) La curva avente equazione $y = 3 - \sqrt{4|x| - 4x^2}$ è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Infatti, se P(x;y) è un suo punto, lo è anche il punto P′(-x;y).

Scritta l'equazione nella forma equivalente $3 - y = \sqrt{4|x| - 4x^2}$, si riconosce che i punti della curva appartengono alla regione piana le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 4|x| - 4x^2 \ge 0 \\ 3 - y \ge 0 \end{cases}, \text{ verificato da } \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y \le 3 \end{cases}$$

Ciò premesso, esplicitiamo l'equazione come segue

$$\gamma : y = \begin{cases} 3 - \sqrt{4x - 4x^2} & per \quad 0 \le x \le 1 \\ 3 - \sqrt{-4x - 4x^2} & per \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$$

La curva γ rappresentativa della funzione è composta dall'unione delle due semiellissi

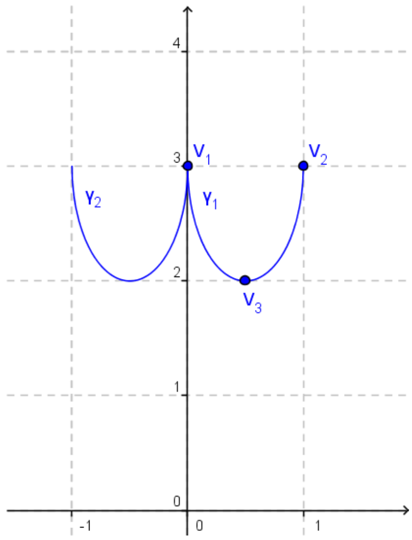

Figura 2

$\gamma_1 : y = 3 - \sqrt{4x - 4x^2}$, per $0 \le x \le 1$ e $y \le 3$;

$\gamma_2 : y = 3 - \sqrt{-4x - 4x^2}$, per $-1 \le x < 0$ e $y \le 3$.

La semiellisse γ_1 coincide con la curva vista nel precedente esercizio n.1, mentre la semiellisse γ_2 è la simmetrica di γ_1 rispetto all'asse y.

La curva è rappresentata in Figura 2.

3) I punti della curva $\gamma : 2 - y = \sqrt{4x - 2x^2}$ hanno coordinate cartesiane che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x - 2x^2 \ge 0 \\ 2 - y \ge 0 \end{cases}, \text{ soddisfatto da } \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ y \le 2 \end{cases}$$

Eliminando il radicale ed elaborando la forma algebrica l'equazione diventa

$$\gamma : (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

che rappresenta un'ellisse traslata rispetto agli assi cartesiani avente centro nel punto C(1;2) e semiassi $a=1, b=\sqrt{2}$; i fuochi sono sulla retta s:x=1 ed i vertici sono i punti $V_1(0;2)$, $V_2(2;2)$, $V_3\left(1;2-\sqrt{2}\right)$, $V_4\left(1;2+\sqrt{2}\right)$. La curva è rappresentata in Figura 3.

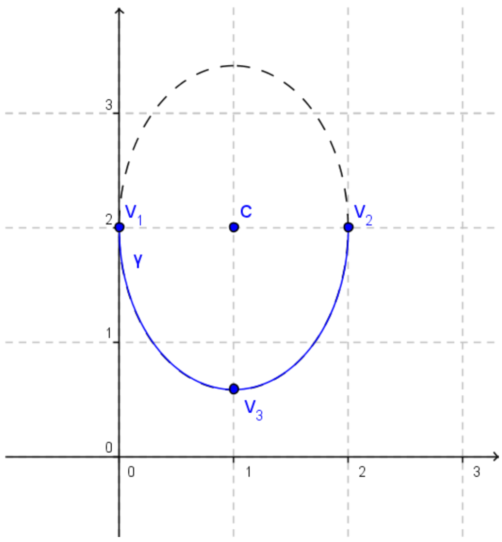

Figura 3