

Discussione di un sistema parametrico (parabola e fascio di circonferenze)

Problema

Considerata la Parabola γ avente equazione $y = 4 - x^2$ che interseca l'asse delle ascisse nei punti A e B, determinare sull'arco AB di γ un punto P in modo che sia soddisfatta la relazione:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2k^2.$$

Soluzione

Si tratta di un classico problema parametrico.

La parabola γ nel riferimento cartesiano ortogonale xOy taglia l'asse delle ascisse nei punti A(-2;0), B(2;0) ed il suo vertice è il punto V(0;4). Il generico punto P(x;y) dell'arco AB ha ascissa $x \in [-2;2]$ ed ordinata $y \in [0;4]$.

La relazione che deve essere soddisfatta dalle misure dei segmenti AP, BP si esprime con la seguente equazione parametrica:

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2k^2 \text{ che semplificata diventa}$$

$$x^2 + y^2 = k^2 - 4 \quad (1)$$

In definitiva, il punto P sarà soluzione del problema posto se le sue coordinate cartesiane verificano le condizioni racchiuse nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 - 4 \\ y = 4 - x^2 \\ (-2 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq y \leq 4) \end{cases}$$

Osservazioni

1. Osserviamo che all'equazione (1) nel piano cartesiano rappresenta un fascio di circonferenze aventi il centro nell'origine ed il raggio di misura $r = \sqrt{k^2 - 4}$.
2. La condizione di realtà per l'equazione (1) richiede che il parametro k assuma valori nell'insieme $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Per la discussione del problema è bene fare un confronto tra l'equazione della parabola e quella del fascio. Si ricava la seguente equazione parametrica risolvente

$$y^2 - y + 8 - k^2 = 0$$

che ammette soluzioni reali per valori del parametro che rendono il suo discriminante non negativo.

$$\Delta = 1 - 4(8 - k^2) \geq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq \frac{31}{4}$$

- Con $k^2 < \frac{31}{4}$ l'equazione risolvente non ammette soluzioni reali. Dal punto di vista analitico vuol dire che dal fascio di circonferenze, con k variabile in $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$, si hanno circonferenze che non hanno punti in comune con la parabola γ . Il problema proposto non ha soluzioni.
- Con $k^2 = \frac{31}{4}$ dal fascio di circonferenze si ottiene la circonferenza C_1 di equazione
$$C_1: x^2 + y^2 = \frac{15}{4}$$

tangente alla parabola nei due punti $P\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; \frac{1}{2}\right)$, $P'\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \frac{1}{2}\right)$ ed il problema in esame ammette perciò due soluzioni.

- Per valori di k tali che $k^2 > \frac{31}{4}$ la circonferenza del fascio è secante la parabola. Si tratta di trovare per quali valori di k si ottiene la circonferenza che passa dai punti A e B, per quali valori di k si ottiene la circonferenza del fascio che passa dal vertice della parabola e per quali valori la circonferenza del fascio ha raggio maggiore di 4. Queste ultime circonferenze non intersecano l'arco AB della parabola e dunque per i valori corrispondenti del parametro il problema non presenta soluzioni.

Passaggio da A e B.

La circonferenza corrispondente ha raggio $r=2$; perciò deve essere

$$x^2 + y^2 = k^2 - 4, \quad k^2 - 4 = r^2 = 2^2 \Rightarrow k^2 = 8 \Rightarrow C_2 : x^2 + y^2 = 4$$

Analiticamente, per $\frac{31}{4} < k^2 \leq 8$, si verifica che la circonferenza interseca l'arco AB

della parabola in quattro punti distinti. Il problema ammette perciò quattro soluzioni.

Passaggio dal vertice V(0;4)

$$x^2 + y^2 = k^2 - 4, \quad k^2 - 4 = r^2 = 4^2 \Rightarrow k^2 = 20$$

$$\Rightarrow C_3 : x^2 + y^2 = 16$$

Analiticamente, per $8 < k^2 < 20$, la circonferenza del fascio interseca la parabola γ in quattro punti, dei quali due si trovano sull'arco AB e gli altri due si trovano nel semipiano delle ordinate negative. Il problema in esame ammette due sole soluzioni.

Con $k^2 = 20$ si ottiene la circonferenza del fascio che passa dal vertice della parabola. Questa circonferenza ha in comune con la parabola quattro punti dei quali due sono coincidenti con il vertice ed altri due sono nel semipiano delle ordinate negative. Il problema ammette due soluzioni coincidenti (il punto P deve coincidere con il vertice V).

Oltre il vertice V

Per valori del parametro k per i quali il raggio della circonferenza è maggiore di 4 la circonferenza del fascio interseca la parabola solo in due punti del semipiano delle ordinate negative ed il problema in esame non ha soluzioni.

In Fig.1 si possono osservare la parabola γ e le tre circonferenze di riferimento: C1, C2, C3.

In Fig.2 abbiamo riportato undici circonferenze del fascio, alcune delle quali non hanno alcun punto in comune con la parabola γ . Le circonferenze sono quelle le cui equazioni sono state ottenute per i valori di k variabile da 2.5 a 5.0 con incrementi di 0.25.

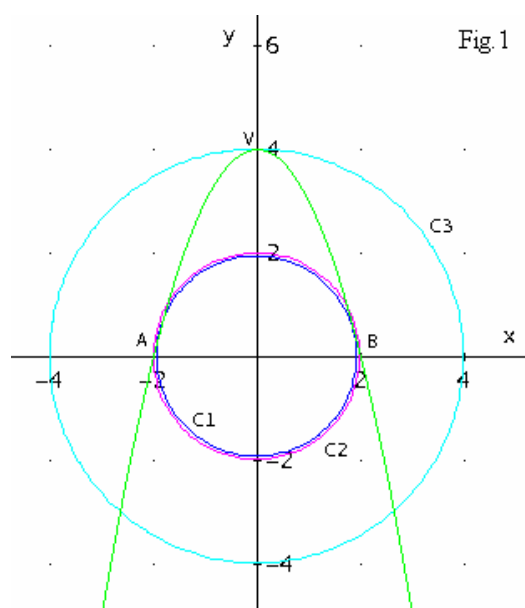


Fig.1

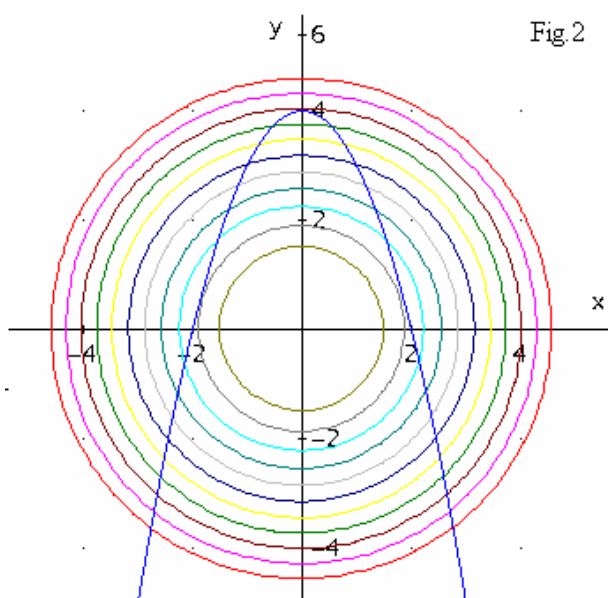


Fig.2