Geometria analitica

Retta, parabola, circonferenza

Problema

1. Scrivere l'equazione della parabola λ che nel sistema di riferimento xOy ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, come vertice V(2;1) ed è tangente alla retta t:2x+y-6=0.

$$\lambda: y=-x^2+4x-3$$

2. Determinare i punti H, K di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse e sia K quello avente ascissa minore. Scrivere l'equazione della retta t passante per K e per il punto B(0;2). Determinare la misura della corda KC staccata dalla parabola sulla retta t. K(1;0), H(3;0),C(5;-8), $\overline{KC}=4\sqrt{5}$

3. Scrivere l'equazione della circonferenza γ avente come centro il vertice della parabola e che è tangente alla retta t. Determinare le coordinate del punto di contatto A tra γ e t.

$$\gamma:(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{9}{5};\ A\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$$

4. Determinare l'equazione della seconda retta t' tangente alla circonferenza γ condotta dal punto B e trovare le coordinate del punto di contatto D. Calcolare l'area del quadrilatero AVDB.

Elaborazioni

1. L'equazione cartesiana della parabola è del tipo $\lambda: y=ax^2+bx+c$, il cui vertice ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)=(2;1)$. Per determinare i valori dei coefficienti imponiamo le seguenti condizioni:
   a. l'ascissa del vertice deve essere 2;
   b. le coordinate del vertice devono verificare l'equazione della parabola;
   c. metteremo a sistema l'equazione della parabola con l'equazione della retta t:2x+y-6=0 ed imporremo che la relativa equazione risolvente abbia discriminante nullo (questa è la condizione algebrica che assicura la tangenza tra parabola e retta).

$-\frac{b}{2a}=2\rightarrow b=-4a;\qquad V(2;1)\in\lambda\rightarrow 4a+2b+c=1$. Da queste due condizioni si deduce che

c=1-4*a*-2(-4*a*)=1+4*a*. Pertanto l'equazione della parabole deve essere del tipo $\lambda: y=ax^2-4ax+1+4a$.

Il sistema da considerare è $\begin{cases}\lambda: y=ax^2-4ax+1+4a\\ t: 2x+y-6=0\end{cases}$, la cui equazione risolvente è

$ax^2-2(2a-1)x+4a-5=0$. La condizione da imporre per la tangenza è $\frac{\Delta}{4}=0\rightarrow$

$(2a-1)^2-a(4a-5)=0\rightarrow a=-1$. L'equazione della parabola è $\lambda: y=-x^2+4x-3$.

2. Punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse:

   $(\lambda: y=-x^2+4x-3) \wedge (y=0) \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow x_1=1; x_2=3$. Risulta K(1;0), H(3;0).

   L'equazione della retta passante per i punti K e B(0;2) è t:2x+y-2=0

   Determiniamo il secondo punto di intersezione tra la retta t e la parabola.

   $(t: 2x+y-2=0) \wedge (\lambda: y=-x^2+4x-3) \rightarrow -x^2+4x-3=2-2x \rightarrow x^2-6x+5=0 \rightarrow x=3\mp 2 \rightarrow$ $x_1=1; x_2=5$. Il secondo punto C comune tra la retta e la parabola è C(5;-8).

   Misura della corda KC$\rightarrow \overline{KC}=4\sqrt{5}$.

3. Punto di contatto A tra la circonferenza e la retta t.

   La circonferenza è tangente alla retta t, quindi la misura del suo raggio è la distanza del centro (il vertice V della parabola) dalla suddetta retta. Applicando la formula della distanza di un punto dalla retta determiniamo la misura del raggio di γ.

   $$r=d(V;t)=\frac{|2\cdot 2+1-2|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

   L'equazione della circonferenza γ è:

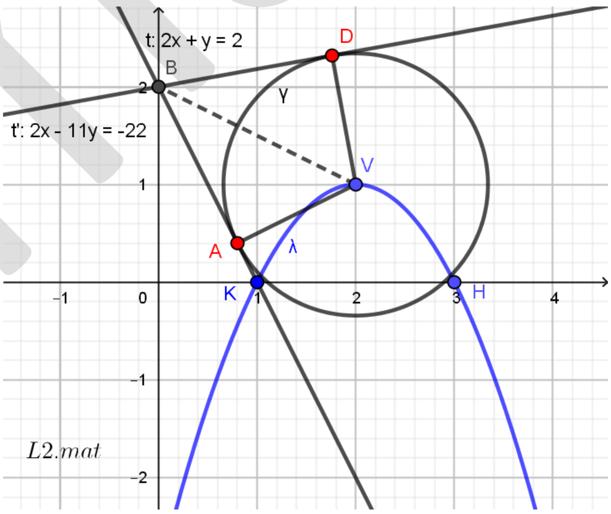
   $$\gamma: (x-2)^2+(y-1)^2=\frac{9}{5} \rightarrow$$
   $$\gamma: 5x^2+5y^2-20x-10y+16=0$$

   Ricerca del punto di contatto A la tra circonferenza e la retta t.

   $$\begin{cases} \gamma: (x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{5} \\ t: y=-2x+2 \end{cases} \rightarrow$$

   $$(x-2)^2+(-2x+1)^2=\frac{9}{5} \rightarrow 25x^2-40x+16=0 \rightarrow$$

   $$(5x-4)^2=0 \rightarrow x=\frac{4}{5}. \quad A\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right).$$



4. Scriviamo l'equazione del fascio F di rette di centro B(0;3) in forma esplicita.

   F:y-2=mx$\rightarrow$F:mx-y+2=0 Per trovare l'equazione della tangente richiesta imponiamo che la distanza del centro della circonferenza dalla generica retta del fascio sia uguale alla misura del raggio r.

   $\frac{|m\cdot 2-1+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow 5(2m+1)^2=9\cdot(m^2+1) \rightarrow m_1=-2$, $m_2=\frac{2}{11}$. Il primo valore rappresenta il coefficiente angolare della retta t, il secondo è quello di t'. Quindi $t': y=\frac{2}{11}x+2 \rightarrow$

   $t': 2x-11y+22=0$

Ricerca del punto di contatto tra t' e γ.

$$\begin{cases} \gamma : (x-2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{9}{5} \\ t' : y = \dfrac{2}{11}x + 2 \end{cases} \rightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{2}{11}x + 2 - 1\right)^2 = \frac{9}{5} \rightarrow \ldots \frac{125}{121}x^2 - \frac{40}{11}x + \frac{16}{5} = 0$$ (N.B.: Δ=0),

$x_1 = x_2 = \dfrac{20}{11} : \dfrac{125}{121} = \dfrac{44}{25} \rightarrow y = \dfrac{2}{11} \cdot \dfrac{44}{25} + 2 = \dfrac{58}{25}$. Il punto di contatto è $D\left(\dfrac{44}{25}; \dfrac{58}{25}\right)$.

Area del quadrilatero AVDB

Osserviamo che il quadrilatero in oggetto è composto dai due triangoli rettangoli congruenti VAB, VDB, con gli angoli retti rispettivamente in A e D. Per calcolare l'area determiniamo la misura del cateto AB.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

$$Area(AVDB) = \overline{AB} \cdot \overline{AV} = \overline{AB} \cdot r = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}$$