Geometria analitica

Retta, circonferenza, iperbole

Problema

In un riferimento cartesiano sono date la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, l'iperbole riferita ai propri assi con i fuochi sull'asse delle ascisse, il semiasse trasverso di misura 5/2 e come asintoti le rette la cui equazione è $2\sqrt{3}x \pm 3y = 0$.

Q_1 - Scrivere le equazioni delle due curve e determinare le coordinate dei fuochi dell'iperbole.

Q_2 - Determinare le equazioni delle tangenti comuni alle due curve e rappresentarle, trovando i punti di contatto con le stesse.

Q_3 - Classificare il quadrilatero formato dalle tangenti trovate e determinarne perimetro ed area.

Elaborazioni

Q_1 - La circonferenza ha equazione $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$.

L'iperbole in oggetto ha equazione canonica $\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Sapendo che il semiasse trasverso *a*=5/2 e che l'equazione complessiva dei due asintoti è $y = \pm \frac{b}{a} x$, ponendo in forma esplicita l'equazione degli asintoti assegnata $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$, dal confronto si deduce che

$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, da cui ricaviamo $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Possiamo scrivere l'equazione dell'iperbole. Risulta

$\gamma_2 : \frac{x^2}{\frac{25}{4}} - \frac{x^2}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1 \rightarrow 4x^2 - 3y^2 = 25$ con fuochi $F_1\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{3}};0\right)$, $F_2\left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{3}};0\right)$.

Q2- Percorso risolutivo

E' immediato riconoscere che le due curve per la reciproca posizione ammettono quattro tangenti comuni e che le stesse hanno equazioni che si possono porre in forma esplicita:

y=mx+q (1)

Per determinare i valori dei parametri m, q di ciascuna retta si deve **mettere a sistema** l'equazione della retta cercata con l'equazione di ciascuna delle due curve e ricavare le rispettive **equazioni risolventi**. Ciò fatto, si deve imporre che ciascuna delle due equazioni abbia **radici coincidenti**, quindi che il rispettivo

discriminante sia **nullo**. In questo modo si ottengono due equazioni nelle incognite ***m***, ***q*** che risolto fornirà le quattro coppie dei valori dei parametri.

Per determinare le coordinate degli otto punti di contatto tra le tangenti con le due curve si utilizzeranno opportunamente le equazioni risolventi ottenute, ricordando che l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ quando ammette radici coincidenti il loro valore è $x=-\frac{b}{2a}$.

Ricerca delle tangenti

Mettiamo a sistema l'equazione (1) con l'equazione della circonferenza.

$\begin{cases} y=mx+q \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ Si ottiene l'equazione risolvente $\left(m^2+1\right)x^2+2mqx+q^2-1=0$ (2)

La condizione di tangenza è: $\frac{\Delta}{4}=m^2q^2-\left(m^2+1\right)\left(q^2-1\right)=0$, che elaborata diventa

$$m^2-q^2-1=0 \qquad (2.1)$$

Mettiamo a sistema l'equazione (1) con l'equazione dell'iperbole.

$\begin{cases} y=mx+q \\ 4x^2-3y^2=25 \end{cases}$ Si ottiene l'equazione risolvente: $\left(4-3m^2\right)x^2-6mqx-3q^2-25=0$ (3)

che fornisce la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4}=9m^2q^2+\left(4-3m^2\right)\left(3q^2+25\right)=0$, la cui forma semplificata è

$$12q^2-75m^2+100=0 \qquad (3.1)$$

Si deve risolvere il sistema algebrico

$\begin{cases} m^2-q^2-1=0 \\ 12q^2-75m^2+100=0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono le coppie ordinate (m;q) che seguono:

$$\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right),\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right),\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right),\left(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$$

alle quali corrispondono rispettivamente le seguenti equazioni delle tangenti

$$t_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3};\; t_2: y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}; t_3: y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}; t_4: y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}.$$

Osserviamo che le rette tangenti sono a due a due parallele.

Punti di contatto con la circonferenza

- Tangente $t_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ L'ascissa del punto di contatto T_1, dall'equazione (2), ha valore $x=-\frac{mq}{m^2+1}$ e sostituendo i valori m=4/3, q=5/3 si ottiene

$$x_{T_1}=-\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}=-\frac{4}{5}.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione della retta si trova l'ordinata: $y_{T_1}=\frac{3}{5}$; $T_1\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

- Tangente $t_2: y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$ L'ascissa del punto T_2 di contatto si ottiene sostituendo sempre nella forma $x=-\frac{mq}{m^2+1}$ i valori $m=\frac{4}{3}$, $q=-\frac{5}{3}$; si ha $x_{T_2}=\frac{4}{5}$ e successivamente $y_{T_2}=-\frac{3}{5}$. Il punto è $T_2\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$.
- Procedendo in modo analogo con le altre due tangenti si ottengono gli altri due punti che sono $T_3\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$, $T_4\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$.

Punti di contatto delle tangenti con l'iperbole

Tangente $t_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ L'ascissa del punto di contatto si ottiene dall'equazione (3); risulta

$x=\frac{3mq}{4-3m^2}$; sostituendo i valori m=4/3, q=5/3 si ricava l'ascissa del punto corrispondente che indichiamo con A. Risulta

$x_A=\frac{3\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}}{4-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\ldots=-5$; sostituiamo questo valore nell'equazione della tangente per ottenere l'ordinata del punto: $y_A=-5$. Il punto è A(-5;-5).

Procedendo in modo analogo per le altre tre tangenti t_2, t_3, t_4, si trovano rispettivamente i punti B(5;5), C(5;-5), D(-5;5).

Q_3 - Le tangenti delimitano un parallelogramma. Infatti, osservando i rispettivi coefficienti angolari si nota che $t_1 // t_2$, $t_3 // t_4$; in particolare si tratta di un rombo. Dimostriamo ciò determinando le coordinate dei vertici P, Q, R, S che risultano essere i punti in cui le tangenti attraversano gli assi cartesiani. Risulta:

$P\equiv t_1\cap t_3\rightarrow P\left(0;\frac{5}{3}\right)$, $Q\equiv t_2\cap t_3\rightarrow Q\left(\frac{5}{4};0\right)$, $R\equiv t_2\cap t_4\rightarrow R\left(0;-\frac{5}{3}\right)$, $S\equiv t_1\cap t_4\rightarrow S\left(-\frac{5}{4};0\right)$.

La misura dei lati del parallelogramma è

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = 5\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = 5\sqrt{\frac{9+16}{16\cdot 9}} = \frac{25}{12}$$

Le diagonali del rombo misurano $\overline{PR} = \frac{10}{3}$, $\overline{QS} = \frac{5}{2}$.

Concludiamo con le misure del perimetro e l'area del rombo:

$$Per(PQRS) = 4\cdot\frac{25}{12} = \frac{25}{3} \quad , \quad Area(PQRS) = \frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{QS} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{3}$$

Segue la figura con tutti gli elementi geometrici elaborati.