Sull'iperbole equilatera e la circonferenza

Problema

1) Scrivere l'equazione dell'iperbole riferita ai propri asintoti che passa per il punto A(-1/2;-8)
2) Dell'iperbole determinare la misura dell'asse trasverso, le coordinate dei vertici e quelle dei fuochi. Rappresentare la curva.
3) Scrivere l'equazione della circonferenza avente come centro C(5;5) e passante per il vertice V_1 dell'iperbole avente coordinate positive. Determinare i punti di intersezione tra l'iperbole e la circonferenza. Riconosciuto che esistono altri due punti comuni P e Q oltre al vertice V_1, determinare l'area del triangolo di vertici V_1, P, Q.

Soluzione

1) L'equazione dell'iperbole è della forma $xy = k$; imponendo che l'equazione sia soddisfatta dalle coordinate del punto A si ricava k=4. Dunque l'equazione cercata è $xy = 4$.
2) Per un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, giacente nel primo e terzo quadrante, è noto che l'equazione è $xy = \frac{a^2}{2}$, con *a* misura del semiasse; pertanto $a = 2\sqrt{2}$ e la distanza tra i due vertici è $2a = 4\sqrt{2}$.

   I vertici sono i punti di intersezione della curva con la bisettrice del primo e terzo quadrante, che rappresenta l'asse di simmetria trasverso.

   Vertici: $V_1(2;2)$, $V_2(-2;-2)$.

   I fuochi in funzione del semiasse sono $F_1(a;a)$, $F_2(-a;-a)$, dunque $F_1(2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $F_2(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$.

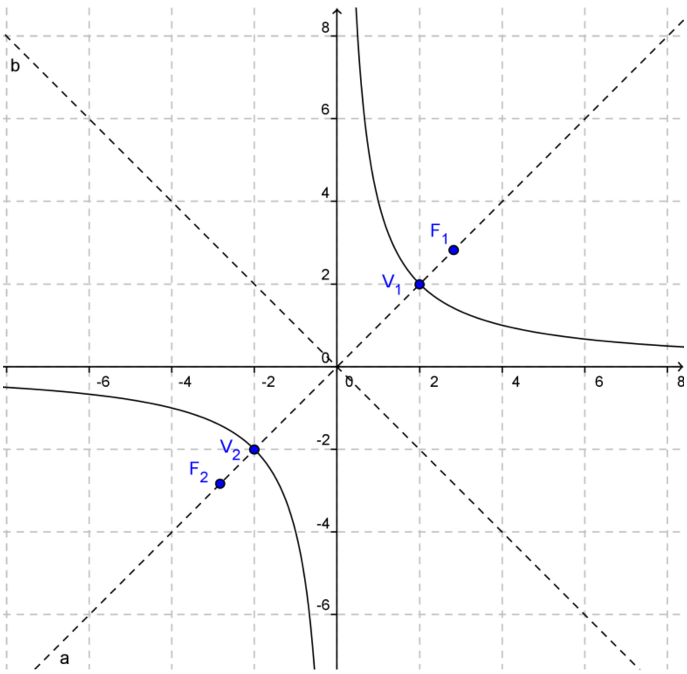

Figura 1

   La curva con i suoi elementi caratteristici è in Figura 1.

3) La circonferenza richiesta ha raggio $r = \overline{V_1C} = 3\sqrt{2}$ e centro C(5;5), per cui l'equazione è

   $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, da cui $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 18$, che ridotta alla forma normale diventa

   $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 32 = 0$.

Punti di intersezione tra circonferenza ed iperbole

Si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due curve.

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y+32=0 \\ xy=4 \end{cases}$$

Il sistema è di quarto grado ed è simmetrico; la forma si può elaborare come segue

$$\begin{cases} x^2+y^2-10(x+y)+32=0 \\ xy=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy-10(x+y)+32=0 \\ xy=4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+y)^2-10(x+y)+24=0 \\ xy=4 \end{cases}$$

Osserviamo che dalla prima equazione si deduce che x+y=4 oppure x+y=6; in definitiva il sistema è equivalente all'unione dei due seguenti

$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}, \begin{cases} x+y=6 \\ xy=4 \end{cases}$ dei quali il primo ammette la soluzione doppia (2;2), corrispondente alle coordinate del vertice V_1, ed il secondo fornisce come soluzioni $\begin{cases} x=3-\sqrt{5} \\ y=3+\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x=3+\sqrt{5} \\ y=3-\sqrt{5} \end{cases}$.

I due punti comuni alle due curve oltre al vertice V_1 sono

$$P\left(3+\sqrt{5};3-\sqrt{5}\right),\ Q\left(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right).$$

Osservazione

Il fatto che la soluzione (2;2) sia risultata doppia indica che le due curve sono tangenti nel punto corrispondente, cioè nel vertice V_1.

Area del triangolo V_1 P Q

Poiché si conoscono le coordinate dei tre vertici, per il calcolo dell'area si può utilizzare la formula del determinante del terzo ordine. Si ha:

$$Area(V_1PQ)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} & 1 \\ 3-\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 2\sqrt{5}$$

La rappresentazione delle curve e degli altri gli elementi geometrici elaborati è riportata in Figura 2.

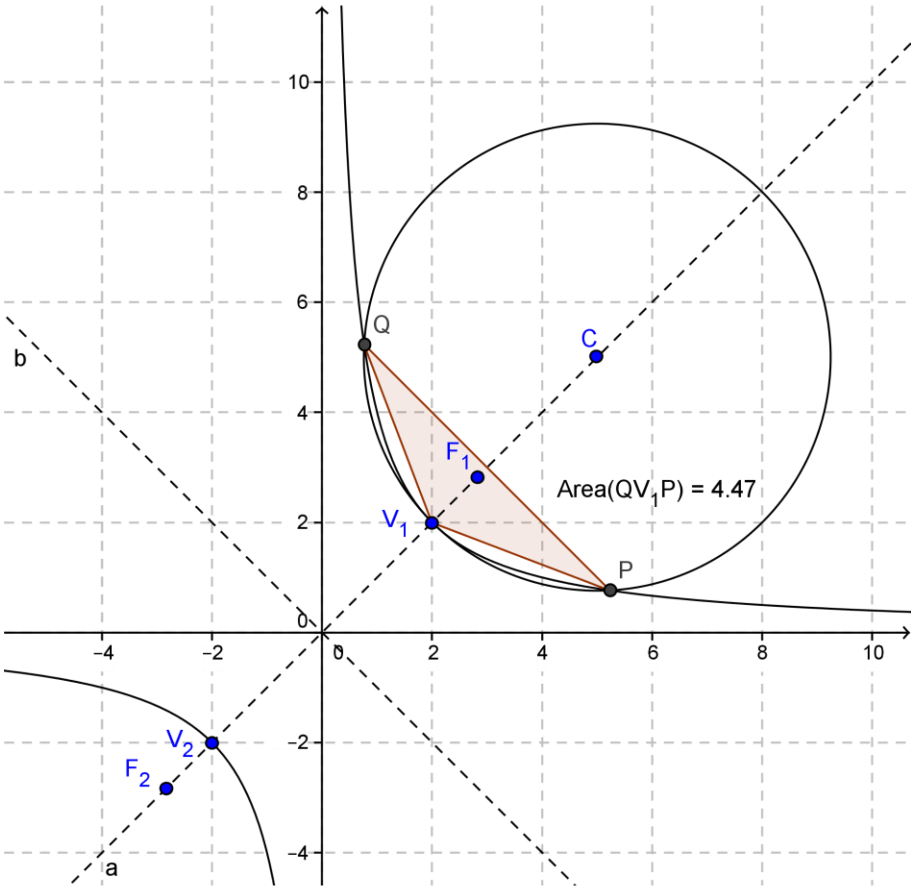

Figura 2