Ellisse e Circonferenza

Problema

1. Scrivere l'equazione dell'ellisse γ_1 riferita ai propri assi sapendo che è tangente alla retta t:2x+y-4=0 nel punto T di ascissa 3/2.
2. Rappresentare l'ellisse, la retta t ed il punto di contatto T.
3. Determinare l'eccentricità dell'ellisse e le coordinate dei fuochi F_1, F_2.
4. Determinare l'area del triangolo F_1F_2T.
5. Scrivere l'equazione della circonferenza γ_2 tangente alla retta t nel punto T e passante per l'origine degli assi.
6. Spiegare perché la normale **n** all'ellisse passa per il centro della circonferenza γ_2 .

Soluzione

1. L'ellisse ha equazione della forma $\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Il punto T appartiene alla retta t ed avendo ascissa 3/2 avrà ordinata 1. $T\left(\frac{3}{2};1\right)$. Imponendo che l'equazione dell'ellisse sia soddisfatta dalle coordinate di T si ricava la relazione

$$\frac{9}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \to \frac{1}{b^2}=1-\frac{9}{4a^2}.$$

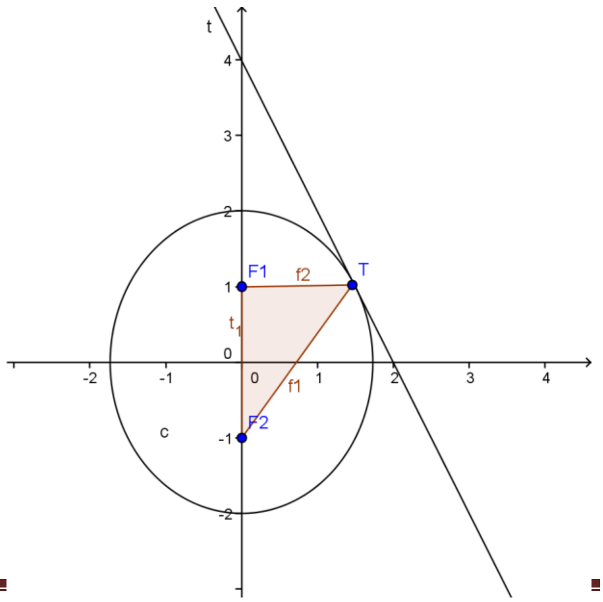
L'equazione dell'ellisse deve dunque essere della forma seguente $\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{9}{4a^2}\right)y^2=1$.

Per determinare il valore del parametro si devono mettere a sistema l'equazione dell'ellisse e quella della retta t ed imporre la condizione di tangenza tra le due curve, ciò consiste nell'imporre che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente del suddetto sistema.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{9}{4a^2}\right)y^2=1 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \to \quad \left(4a^2-8\right)x^2-4\left(4a^2-9\right)x+15a^2-36=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4\left(4a^2-9\right)^2-\left(4a^2-8\right)\left(15a^2-36\right)=0 \ \to \left(a^2-3\right)^2=0 \to a^2=3$$

Figura 1



L'equazione dell'ellisse cercata è

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$$

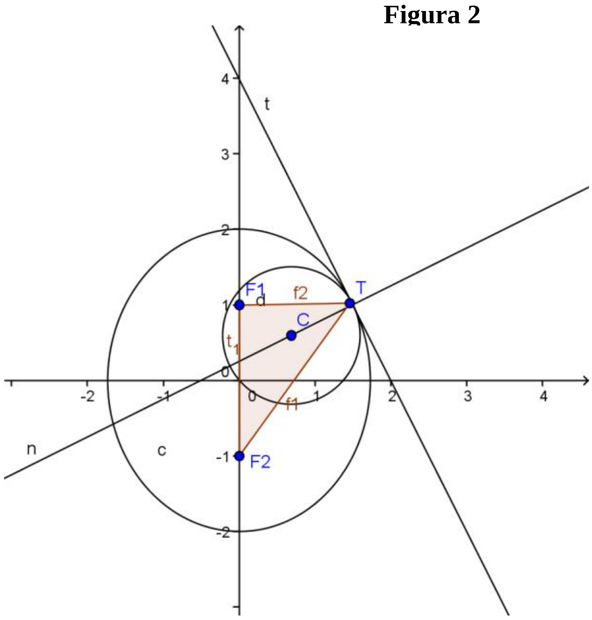
2. Gli elementi geometrici richiesti sono rappresentati in **Figura 1**.
3. Osserviamo che l'ellisse ha l'asse maggiore sull'asse delle ordinate e dunque i due fuochi sono $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, con $c=\sqrt{b^2-a^2}=1$.

   L'eccentricità dell'ellisse è $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.
4. Dai valori delle coordinate dei fuochi e del punto T si deduce che il triangolo F_1F_2T è rettangolo in F_1 per cui la sua area è:

$$Area(F_1F_2T) = \frac{1}{2}\overline{F_1T} \cdot \overline{F_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

5. L'equazione della circonferenza richiesta, passando per l'origine degli assi, non conterrà il termine noto, dunque è della forma: $\gamma_2 : x^2 + y^2 + ax + by = 0$.
   Imponendo che l'equazione sia soddisfatta dalle coordinate del punto T si ricava la condizione
   $\frac{9}{4} + 1 + \frac{3}{2}a + b = 0$ ad cui $b = -\frac{3}{2}a - \frac{13}{4}$. Quindi è della forma:
   $$\gamma_2 : x^2 + y^2 + ax - \left(\frac{3}{2}a + \frac{13}{4}\right)y = 0$$
   D'altra parte, dovendo essere la circonferenza tangente alla retta ***t*** nel punto T, il centro si troverà sulla retta **n** per T perpendicolare a ***t*** stessa. La retta n è la normale di cui si parla nel successivo punto 6.
   Riportiamo l'equazione della retta **n**, lasciando il compito di determinarla al lettore.
   $$n : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$
   Il centro della circonferenza è il punto $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{3}{4}a + \frac{13}{8}\right)$ ed imponendo che le sue coordinate verifichino l'equazione della normale si ricava la condizione per determinare il valore del parametro *a*.
   $$\frac{3}{4}a + \frac{13}{8} = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{11}{8}$$
   L'equazione della circonferenza è
   $\gamma_2 : x^2 + y^2 - \frac{11}{8}x - \frac{19}{16}y = 0$, il centro è
   $C\left(\frac{11}{16}; \frac{19}{32}\right)$.

Figura 2



6. Osserviamo che la retta **n** normale all'ellisse in un suo punto è per definizione la retta perpendicolare alla tangente alla curva nello stesso punto. Poiché il punto di contatto è T ed è comune alla circonferenza ed all'ellisse, si deduce che la retta normale all'ellisse coincide con la normale alla circonferenza; d'altra parte, il centro di una circonferenza si trova sulla normale alla tangente in un punto qualsiasi della circonferenza, quindi rimane acquisito che il centro C della circonferenza si trova sulla normale all'ellisse in T.
   In **Figura 2** sono rappresentati tutti gli elementi geometrici determinati nell'esercizio.