Geometria analitica della circonferenza e dell'ellisse

Problema

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si considerino la retta s:x=3 ed il punto A(1;2). Risolvere i seguenti quesiti.

1) Scrivere l'equazione della circonferenza γ_1 tangente all'asse delle ascisse, avente centro sulla retta s e passante per il punto A.
2) Determinare l'equazione dell'ellisse γ_2 avente centro nell'origine degli assi e assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati sapendo che un suo vertice è il punto B di contatto tra la circonferenza γ_1 e l'asse x e che passa per il punto A. Determinare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità dell'ellisse.
3) Determinare l'equazione della retta t tangente all'ellisse nel punto A.
4) La circonferenza γ_1 determina sulla retta t la corda AD. Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono A, D ed il centro C della circonferenza.
5) Determinare l'equazione dell'ellisse γ_3 ottenuta dall'ellisse γ_2 sottoponendo questa alla traslazione che sposta il suo centro nel centro della circonferenza γ_1 .
6) Realizzare la figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Risoluzione

1) La circonferenza γ_1 ha equazione

$\gamma_1 : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e poiché il suo centro appartiene alla retta s:x=3 sarà –a/2=3, da cui a=-6. L'equazione è della forma $\gamma_1 : x^2 + y^2 - 6x + by + c = 0$.

Osserviamo ora che la circonferenza oltre a passare dal punto A dovrà passare anche dal punto B(3;0) in cui è tangente all'asse x; pertanto sussistono le seguenti condizioni algebriche:

$$A \in \gamma_1 \rightarrow 1 + 4 - 6 + 2b + c = 0; \quad B \in \gamma_1 \rightarrow 9 - 18 + c = 0,$$

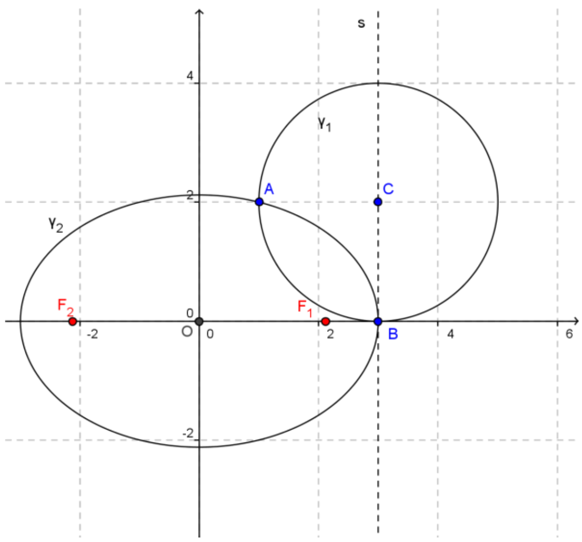
dalle quali si ricavano c=9, b=-4. L'equazione della circonferenza è

$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ con centro $C(3;2)$.

2) L'equazione dell'ellisse è della forma $\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e sapendo che un vertice è B(3;0) deduciamo che *a*=3. Dunque $\gamma_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Imponendo che la curva passi da A(1;2) si trova la condizione algebrica che permette di determinare il valore di b^2.

$A \in \gamma_2 \rightarrow \frac{1}{9} + \frac{4}{b^2} = 1$, da cui $b^2 = \frac{9}{2}$. L'equazione dell'ellisse è $\gamma_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} = 1$.

Fuochi ed eccentricità della curva



I semiassi dell'ellisse misurano $a=3$, $b=3/\sqrt{2}$ dunque $a>b$ e perciò i fuochi si trovano sull'asse delle ascisse. Risulta:

$c^2=a^2-b^2=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$, quindi $c=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

I due fuochi sono $F_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}};0\right)$, $F_2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};0\right)$.

L'eccentricità vale: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Determiniamo l'equazione della **retta tangente** all'ellisse nel punto A applicando le **formule di sdoppiamento**, quindi effettuando nell'equazione dell'ellisse le sostituzioni

$$x^2 \leftarrow x_A \cdot x, \quad y^2 \leftarrow y_A \cdot y.$$

Si ha: $t_A : \frac{1\cdot x}{9}+\frac{2\cdot 2\cdot y}{9}=1 \rightarrow t_A : x+4y=9$.

4) Per determinare il secondo estremo D della corda AD intercettata dalla circonferenza sulla retta tangente all'ellisse si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza.

$\begin{cases} t_A : x+4y=9 \\ \gamma_1 : x^2+y^2-6x-4y+9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=9-4y \\ (9-4y)^2+y^2-6(9-4y)-4y+9=0 \end{cases}$, da cui l'equazione

$17y^2-52y+36=0$, le cui radici sono $y_1=\frac{18}{17}$, $y_2=2$ (ordinata di A).

Il punto D ha ascissa $x=9-4\cdot\frac{18}{17}=\frac{81}{17}$, quindi $D\left(\frac{81}{17};\frac{18}{17}\right)$.

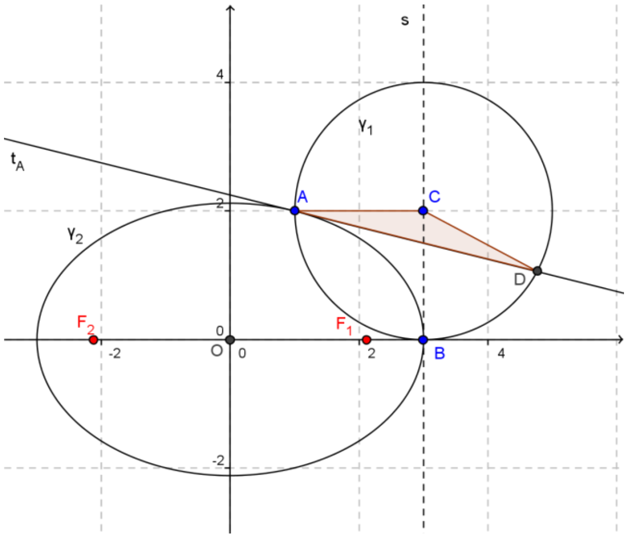
Misura della corda AD

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{81}{17}-1\right)^2+\left(\frac{18}{17}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{64}{17}\right)^2+\left(-\frac{16}{17}\right)^2}=\frac{16}{17}\cdot\sqrt{17}$$

Area del triangolo ADC

Il triangolo è isoscele su AD; determiniamo l'altezza relativa alla base AD applicando la **formula della distanza di un punto da una retta**, in questo caso per la distanza del centro C della circonferenza dalla retta t:x+4y=9.

$$d\left(C;t_A\right)=\frac{\left|3+4\cdot 2-9\right|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$$



$$Area\left(ADC\right)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot d\left(C;t_A\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{17}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{16}{17}$$

5) La trasformazione che permette di ottenere l'equazione dell'ellisse γ_3 traslata di γ_2 è la **traslazione determinata dal vettore** $\vec{V}=\overrightarrow{OC}=x_C\vec{i}+y_C\vec{j}$, che trasforma il generico punto P(x;y) del piano cartesiano nel punto P′ (x′;y′) con $x'=x+x_C$, $y'=y+y_C$. Poniamo

$$\tau:\begin{cases}x'=x+3\\ y'=y+2\end{cases}$$

Per ottenere operativamente l'equazione cartesiana dell'ellisse traslata γ_3 si devono ricavare x ed y dalle equazioni della traslazione τ e sostituire le espressioni alle corrispondenti variabili nell'equazione di γ_2 , ciò fatto, basta eliminare gli apici.

$$\begin{cases}x=x'-3\\ y=y'-2\end{cases}\rightarrow\tau\left(\gamma_2\right):\frac{\left(x'-3\right)^2}{9}+\frac{2\left(y'-2\right)^2}{9}=1$$, infine

$$\gamma_3:\frac{\left(x-3\right)^2}{9}+\frac{2\left(y-2\right)^2}{9}=1$$

6) Segue la figura completa di tutti gli elementi geometrici elaborati.