

Esercizi sulla circonferenza

Es1) Scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento AB, con A(1;3), B(-3;5).

Soluzione

La circonferenza ha come centro il punto medio M del segmento AB. Le coordinate di M sono:

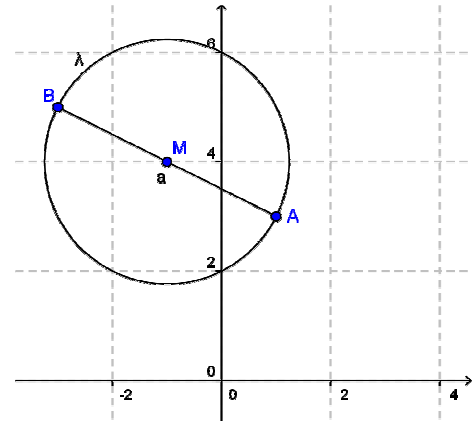
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -1, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 4.$$

Il raggio della circonferenza ha misura pari alla metà del diametro: $r = \frac{AB}{2}$. Poiché

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

l'equazione della circonferenza λ richiesta è:

$$\lambda : (x+1)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow \lambda : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$$



Es2) Scrivere l'equazione della circonferenza il cui diametro è il segmento avente per estremi i punti di intersezione della retta $s: 3x+2y-6=0$ con gli assi coordinati.

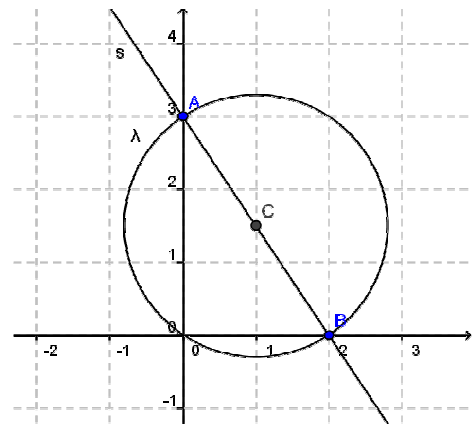
Soluzione

Indichiamo con A e B i due punti di intersezione della retta s con gli assi coordinati, con A(0;3), B(2;0). La misura del diametro della circonferenza è

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{13}$. Poiché il centro C della circonferenza è il punto medio tra A e B, C(1;3/2), deduciamo che l'equazione della circonferenza λ è:

$$\lambda : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \rightarrow \lambda : x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$$

Osserviamo che la circonferenza passa per l'origine degli assi; ciò è una conseguenza del fatto che il segmento AB è un diametro e che l'angolo AOB, con O origine degli assi, è retto.



Es3) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per il punto A(-1;-3) ed avente come centro il punto comune alle due rette $s_1: 2x+3y-4=0$, $s_2: x+y-3=0$

Soluzione

Ricordiamo che l'equazione della circonferenza ridotta alla forma normale ha la seguente forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ e che il suo centro ha coordinate } C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right).$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette $s_1: 2x+3y-4=0$, $s_2: x+y-3=0$ si determinano le coordinate del centro della circonferenza e quindi si trovano i valori dei due coefficienti a , b . Per determinare il valore del termine noto c (terzo parametro dell'equazione), basterà imporre che le coordinate del punto A soddisfino l'equazione della curva.

$$\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow -\frac{a}{2}=5 \rightarrow a=-10; -\frac{b}{2}=-2 \rightarrow b=4 \text{ Il centro è il punto } C(5;-2).$$

L'equazione della circonferenza deve essere del tipo seguente:

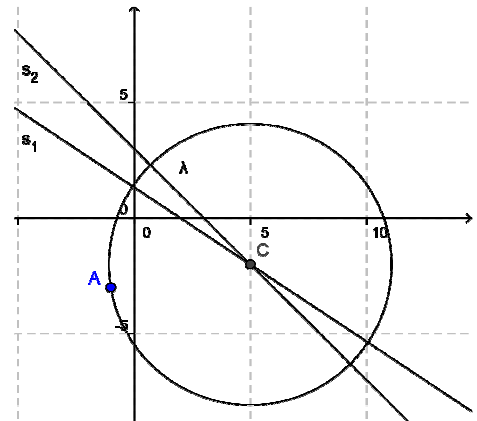
$$\lambda: x^2 + y^2 - 10x + 4y + c = 0$$

Imponiamo ora che le coordinate del punto A verifichino detta equazione.

$$A(-1;-3) \in \lambda \rightarrow 1+9+10-12+c=0 \rightarrow c=-8$$

L'equazione della circonferenza cercata è

$$\lambda: x^2 + y^2 - 10x + 4y - 8 = 0$$



Es4) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti A(3;-2), B(-1;-4) ed avente il centro sull'asse delle scisse.

Soluzione

Facendo riferimento all'equazione della circonferenza nella forma $\lambda: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, possiamo imporre che essa sia soddisfatta dalle coordinate dei due punti A, B ed ottenere due condizioni per i parametri a, b, c; la terza condizione la otteniamo imponendo che il suo

centro $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, dunque che deve essere $-\frac{b}{2}=0 \rightarrow b=0$.

Le prime due condizioni sono:

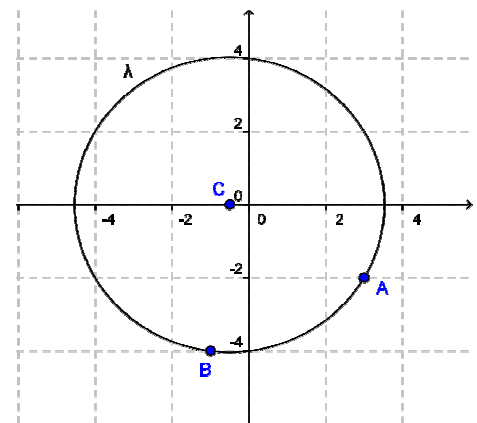
$$A \in \lambda: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = -13;$$

$$B \in \lambda: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow a - 4b + c = -17$$

Poniamo $b=0$ e risolviamo il sistema composto dalla due equazioni

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = -13 \\ -a - 4b + c = -17 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -16 \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza è: $\lambda: x^2 + y^2 + x - 16 = 0$



Es5) Scrivere le equazioni delle due circonferenze aventi centro nel punto C(1;2) una delle quali è tangente all'asse delle ascisse e l'altra all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione piana delimitata dalle due circonferenze.

Soluzione

Le due circonferenze sono concentriche, una ha raggio $r_1=2$, l'altra raggio $r_2=1$. Le loro equazioni sono:

$$\lambda_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4,$$

$$\lambda_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Valore dell'area della regione piana.

Le due circonferenze delimitano una corona circolare la cui area è

$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 3\pi$$

