Geometria analitica della circonferenza

Con applicazione della geometria sintetica

Problema

a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per i punti A(1;0), B(0;2) , avente centro nel terzo quadrante e raggio $r=\frac{\sqrt{265}}{4}$.

b) Determinare l'equazione della retta t tangente a γ in A e calcolare l'area del triangolo avente per vertici il centro C di γ e i due punti di intersezione della tangente t con gli assi cartesiani.

c) Determinare le coordinate dei vertici del triangolo equilatero circoscritto alla circonferenza γ tale che un suo lato sia sulla retta t. Indicare i valori del perimetro e dell'area del suddetto triangolo.

d) Realizzare la figura riepilogativa con tutti gli elementi geometrici elaborati.

Risoluzione

a) In riferimento al sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy l'equazione della circonferenza è

$$\gamma: x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Per trovare i valori dei coefficienti a, b, c, imponiamo innanzitutto che le coordinate dei punti A e B verifichino l'equazione della circonferenza ottenendo in tal modo due equazioni che permettono di eliminare due dei tre parametri.

$\begin{cases} A\in\gamma \to 1+a+c=0 \\ B\in\gamma \to 4+2b+c=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a=2b+3 \\ c=-2b-4 \end{cases}$ L'equazione di γ è della forma

$$\gamma: x^2+y^2+(2b+3)x+by-2b-4=0$$

Il centro di γ è $C\left(-b-\frac{3}{2};-\frac{b}{2}\right)$ e poiché deve appartenere al terzo quadrante dovrà risultare

$\left(-b-\frac{3}{2}<0\right)\wedge\left(-\frac{b}{2}<0\right)$, da cui $b>0$.

Osserviamo che il raggio di γ è la distanza di C da A o da B. Troviamo la distanza $\overline{CA}$ e poniamola uguale alla misura del raggio. Direttamente poniamo

$$\overline{CA}^2=r^2 \to \left(1+b+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{265}}{4}\right)^2 \to 4b^2+16b-33=0$$

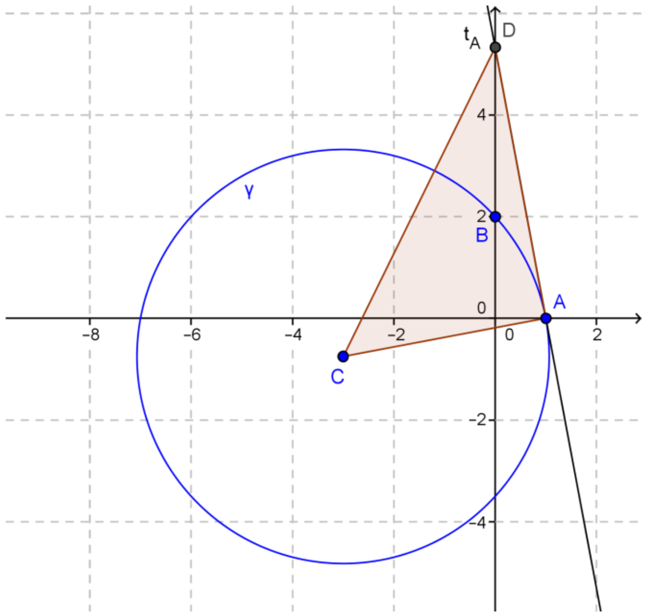
L'equazione è soddisfatta dai valori $b_1=-\frac{11}{2}$, $b_2=\frac{3}{2}$ e per quanto premesso è accettabile solo quello positivo. Concludiamo che l'equazione della circonferenza è:

$\gamma : x^2 + y^2 + 6x + \frac{3}{2}y - 7 = 0$, con centro $C\left(-3; -\frac{3}{4}\right)$.

b) La **retta tangente a γ in A** è perpendicolare al raggio CA; poiché il coefficiente angolare della retta contenente il suddetto raggio vale $m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3}{16}$ possiamo scrivere l'equazione della tangente cercata.

$$t_A : y = -\frac{16}{3}(x-1)$$

La tangente t_A interseca gli assi coordinati in A(1;0) e in D(0;16/3).



Area del triangolo CAD

Il triangolo è rettangolo in A, perché, com'è noto, tangente ad una circonferenza e raggio che passano per lo stesso punto sono tra loro perpendicolari.

Poiché

$$\overline{AD} = \sqrt{{x_A}^2 + {y_D}^2} = \sqrt{1 + \frac{256}{9}} = \frac{\sqrt{265}}{3}$$

otteniamo

$$Area(CAD) = \frac{1}{2}\overline{CA} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{265}}{4} \cdot \frac{\sqrt{265}}{3} = \frac{265}{24}$$

c) Siano P_1, P_2, P_3 i vertici del triangolo equilatero circoscritto a γ. Ricordiamo che la **circonferenza inscritta in un triangolo qualsiasi** ha come centro il punto di intersezione delle bisettrici (**incentro**) ma **nel caso in esame** il triangolo circoscritto è equilatero e in esso le bisettrici coincidono con le mediane, perciò **l'incentro del triangolo è anche il baricentro**. E' noto che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra. Supponendo che sia P_1 il vertice del triangolo opposto al lato giacente sulla tangente t_A, e dunque che P_1A è una mediana, dalla proprietà richiamata si deduce che $\overline{P_1A} = 3r$, dove r è il raggio di γ. La relazione trovata permette di determinare le coordinate cartesiane di P_1.

Prima di occuparci delle coordinate cartesiane dei vertici vogliamo richiamare la nota relazione tra la misura *l* del lato di un triangolo equilatero e la misura *h* delle altezze dello stesso.

Risulta: $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$, per cui, essendo $h = 3r$, si ricava anche

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \cdot r = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{265}}{2}$$

Valori del perimetro e dell'area del triangolo equilatero circoscritto.

Perimetro $$Perim(P_1P_2P_3)=3l=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{265}}{2}$$

Area $$Area(P_1P_2P_3)=\frac{l^2}{4}\sqrt{3}=\frac{785\sqrt{3}}{16}$$

Coordinate cartesiane di P_1

Sussistono i seguenti rapporti

$$\frac{x_A-x_{P_1}}{x_A-x_C}=3,\quad \frac{y_A-y_{P_1}}{y_A-y_C}=3$$

dai quali si ottiene

$$x_{P_1}=x_A+3(x_C-x_A)=1+3(-3-1)=-11;\ y_{P_1}=y_A+3(y_C-y_A)=-\frac{9}{4}$$

Coordinate dei vertici P_2, P_3

I vertici in questione giacciono sulla retta tangente t_A e si possono trovare le rispettive coordinate intersecando la suddetta tangente con la circonferenza Γ avente come centro il vertice P_1 e raggio pari alla misura del lato del triangolo equilatero in oggetto.

La circonferenza Γ ha equazione

$$\Gamma:(x+11)^2+\left(y+\frac{9}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{265}}{2}\right)^2$$

Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases}\Gamma:(x+11)^2+\left(y+\frac{9}{4}\right)^2=\frac{795}{4}\\ t_A:y=-\frac{16}{3}(x-1)\end{cases}$$

si ottengono le coordinate dei due vertici:

$$P_2\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{4};-4\sqrt{3}\right),$$

$$P_3\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4};4\sqrt{3}\right)$$