Fasci di curve

Problemi sulla circonferenza

Problema_1

1) Considerata l'equazione parametrica $(2k-1)x^2 + ky^2 - x - 3ky - 4 = 0$ stabilire per quale valore di k essa rappresenta una circonferenza reale nel piano cartesiano.
2) Riconosciuto che esiste un solo valore del parametro che verifica la condizione richiesta nel precedente punto, della corrispondente circonferenza determinare le coordinare del centro C, la misura del raggio e i punti A, B in cui la stessa interseca l'asse delle ordinate.
3) Determinare l'area del triangolo ABC.

Problema_2

Considerata l'equazione $x^2 + y^2 + kx - (2-k)y + k + 3 = 0$ risolvere i quesiti che seguono.

1) Determinare la curva del fascio che passa dal punto A appartenente alla retta s:x-2y+1=0 avente ascissa 1.
2) Per il valore di k trovato nel precedente quesito, scrivere l'equazione della curva λ e precisarne il tipo e le caratteristiche principali.
3) Determinare i punti comuni tra la curva λ e la retta s. Rappresentare la curva λ e la retta s.
4) Riconosciuto che λ è una circonferenza, siano C il suo centro, D ed E i punti in cui la stessa interseca l'asse y, con E avente ordinata maggiore. Dimostrare che i punti A, C, E sono allineati.
5) Calcolare l'area del quadrilatero ABDE.

Elaborazioni

Problema_1

1) L'equazione rappresenta una circonferenza se i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali; dunque deve risultare

$2k-1=k$, da cui $k=1$.

L'equazione corrispondente è $x^2+y^2-x-3y-4=0$.

A questo punto occorre verificare che l'equazione rappresenti una circonferenza con punti reali. Ricordiamo che in riferimento all'equazione canonica $x^2+y^2+ax+by+c=0$ la condizione affinché essa rappresenti una circonferenza con punti reali è

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \geq 0.$$

Nel caso in esame risulta

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c = \frac{1}{4}+\frac{9}{4}+4=\frac{13}{2}>0$ Concludiamo che la circonferenza è reale.

2) Il centro della circonferenza è $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ed il raggio ha misura $r=\sqrt{\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Per trovare le coordinate dei punti A, B di intersezione della circonferenza con l'asse y si deve risolvere il sistema di equazioni

$\begin{cases} x^2+y^2-x-3y-4=0 \\ x=0 \end{cases}$ da cui A(0;-1), B(0;4)

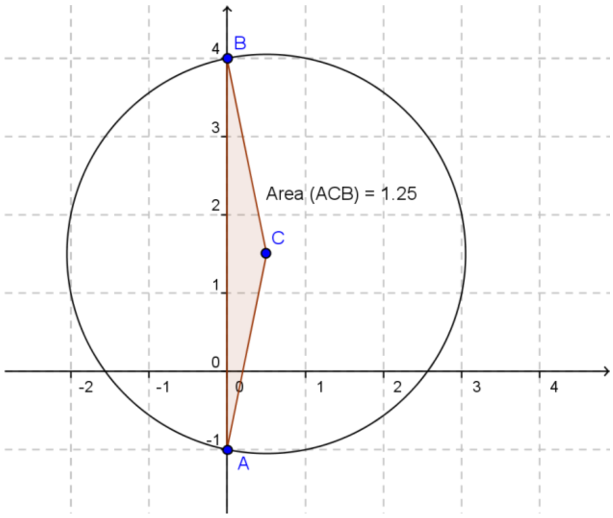

Figura 1

Area del triangolo ACB

Osserviamo che la corda AB misura 5 e che l'altezza del triangolo relativa alla base AB è

$$h=d\left(C;asse\_y\right)=x_C=\frac{1}{2}.$$

L'area del triangolo vale

$$Area\left(ACB\right)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

Problema_2

1) Il punto della retta s avente ascissa x=1 è A(1;1). Imponendo che l'equazione parametrica sia soddisfatta dalle coordinate di A si ottiene un'equazione dalla quale si determina il valore del parametro.

$$1+1+k\cdot 1-\left(2-k\right)\cdot 1+k+3=0\rightarrow 3k+3=0\rightarrow k=-1$$

Equazione della curva $\lambda: x^2+y^2-x-3y+2=0$

2) La curva λ è una circonferenza avente come centro $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ e raggio

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) I punti comuni tra la retta s e la circonferenza λ si determinano risolvendo il sistema formata dalle equazioni delle due curve. Si ha:

$$\begin{cases} s: x-2y+1=0 \\ \lambda: x^2+y^2-x-3y+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ (2y-1)^2+y^2-(2y-1)-3y+2=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x=2y-1 \\ 5y^2-9y+4=0 \end{cases} \rightarrow A(1;1),\ B\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right).$$

4) I punti comuni alla circonferenza λ e all'asse y sono $D(0;1)$, $E(0;2)$.

Allineamento dei punti A,C,E.

Osserviamo che il punto medio del segmento di estremi A,E ha coordinate

$$x=\frac{x_A+x_E}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}=x_C\ ;\ y=\frac{y_A+y_E}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=y_C$$

Quindi coincide con il centro della circonferenza. I punti A, C, E sono pertanto sullo stesso diametro di λ, quindi sono allineati.

5) Area del quadrilatero ABDE

Il quadrilatero ABDE si può pensare come l'unione dei due triangoli ADE, ABD. Il triangolo ADE risulta essere rettangolo in D perché A e D hanno la stessa ordinata, quindi il segmento AD è perpendicolare all'asse y; il triangolo è anche isoscele perché $\overline{AD}=\overline{DE}=1$; la sua area vale

$$S_1=Area(ADE)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}^2=\frac{1}{2}.$$

Il triangolo ABD, considerato sulla base AD, ha come altezza la distanza di B dal segmento AD e la sua misura è

$$h=y_A-y_B=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

L'area del triangolo è:

$$S_2=Area(ABD)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot h=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

Concludiamo che l'area del quadrilatero ABDE vale

$$Area(ABDE)=S_1+S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

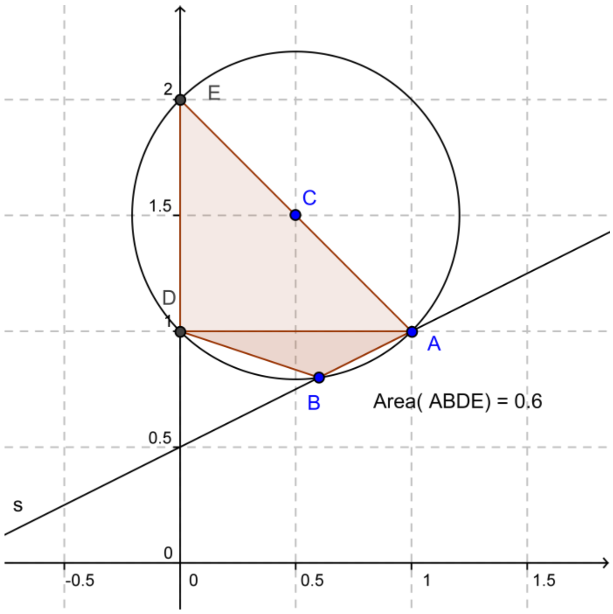

Figura 2