Sui fasci di circonferenze

Nel riferimento cartesiano *xOy* risolvere i seguenti quesiti.

1) Scrivere l'equazione della retta avente coefficiente angolare -3/4 che interseca gli assi cartesiani nei punti A e B del primo quadrante in modo che il triangolo AOB abbia perimetro 12.
2) Scrivere l'equazione del fascio F_1 di circonferenze avente come punti base i punti A e B.
3) Determinare l'equazione della circonferenza λ_1 del fascio F_1 passante per il punto P(-2;0).
4) Scrivere l'equazione del fascio di circonferenze concentriche con λ_1 e determinare tra queste curve la circonferenza λ_2 che forma con λ_1 una corona circolare la cui area è uguale a quella del cerchio delimitato da λ_1 .
5) Realizzare una figura che comprenda tutti gli elementi geometrici elaborati nei precedenti punti.

Soluzione

1) Sia **s** la retta di cui determinare l'equazione; s ha equazione esplicita della forma

   $s: y = -\frac{3}{4}x + k$, con k>0, considerato che deve intersecare il semiasse positivo delle ordinate.

   La retta s interseca l'asse *x* in $A\left(\frac{4}{3}k;0\right)$ e l'asse y in $B(0;k)$.

   Per il perimetro del triangolo AOB occorre la misura dell'ipotenusa AB. Applicando il teorema di Pitagora si ha

   $$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}k\right)^2 + k^2} = \frac{5}{3}k .$$

   $$Per(AOB) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = \frac{4}{3}k + k + \frac{5}{3}k = 4k$$

   Dalla condizione imposta per il perimetro che debba misurare 12 si ricava k.

   $4k = 12$, da cui k=3.

   Equazione della retta $s: y = -\frac{3}{4}x + 3$; punti di intersezione con gli assi: $A(4;0)$, $B(0;3)$.

2) Per scrivere l'equazione del fascio di circonferenze aventi come punti base A e B occorrono le equazioni di due curve generatrici del fascio; possiamo scegliere la circonferenza λ_0 avente come diametro AB e la retta stessa AB che rappresenta l'asse radicale del fascio.

   Equazione della circonferenza λ_0

La circonferenza ha come centro il punto C medio tra A e B e raggio $r = \overline{AB}/2 = 5/2$.

Poiché $C\left(2;\frac{3}{2}\right)$, l'equazione cercata è

$\lambda_0 : (x-2)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, che diventa $\lambda_0 : x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$.

Per l'equazione del fascio utilizziamo un solo parametro.

Osserviamo che l'equazione della retta ***s*** in forma implicita è $s: 3x + 4y - 12 = 0$.
L'equazione del fascio è:

$F_1 : x^2 + y^2 - 4x - 3y + h(3x + 4y - 12) = 0$, che possiamo scrivere nella forma canonica

$F_1 : x^2 + y^2 + (3h-4)x + (4h-3)y - 12h = 0$

3) Per determinare la circonferenza del fascio passante per P(-2;0) imponiamo che le coordinate di questo punto verifichino l'equazione del fascio per trovare il corrispondente valore del parametro.

$P(-2;0) \in \lambda_1 \Leftrightarrow (-2)^2 + 0^2 + (3h-4)\cdot(-2) + (4h-3)\cdot(0) - 12h = 0$, da cui $h = \frac{2}{3}$.

Equazione della circonferenza

$\lambda_1 : x^2 + y^2 + \left(3\cdot\frac{2}{3} - 4\right)x + \left(4\cdot\frac{2}{3} - 3\right)y - 12\cdot\frac{2}{3} = 0$, $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 2x - \frac{1}{3}y - 8 = 0$

La circonferenza ha come centro $C_1\left(1;\frac{1}{6}\right)$

4) Il fascio F_2 di circonferenze concentriche con λ_1 ha equazione

$F_2 : (x-1)^2 + \left(x-\frac{1}{6}\right)^2 = r^2$, $\forall r \geq 0$

Ricerca dell'equazione della circonferenza λ_2

Se indichiamo con r_1 ed r_2 rispettivamente le misure dei raggi delle circonferenze λ_1, λ_2, la condizione imposta per l'area della corona circolare definita dalla stesse è

$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi r_1^2$, da cui $r_2^2 = 2r_1^2$, quindi $r_2 = \sqrt{2}r_1$.

La misura di r_1 è

$$r_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{36} + 8} = \frac{5}{6}\sqrt{13}$$, quindi $$r_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{6}\sqrt{13} = \frac{5}{6}\sqrt{26}$$

Equazione di λ_2

$$\lambda_2 : (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\sqrt{26}\right)^2$$, da cui $$\lambda_2 : (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{325}{18}$$

5) Nella figura riportata sono indicati tutti gli elementi geometrici elaborati, nonché, con stile tratteggio, la retta dei centri del fascio F_1.