Equazioni parametriche intere o fratte

che ridotte alla forma normale sono di primo grado

Strategia risolutiva

Breve digressione sulla programmazione didattica da predisporre per la Prima Classe del Liceo

Spesso capita che Studenti del primo anno del Liceo manifestino notevole preoccupazione per l'incapacità di affrontare con sicurezza un'equazione parametrica contenente l'incognita solo con grado uno, soprattutto se nella forma iniziale dell'equazione sono presenti delle frazioni contenenti in qualche denominatore il parametro e/o l'incognita.

Per incoraggiare gli Studenti che "soffrono particolarmente" l'approccio allo studio dell'argomento citato dico subito che a **mio avviso lo studio delle equazioni parametriche presenta un indice di difficoltà concettualmente alto.** Osservando le abilità medie raggiunte dagli Studenti di 14-15 anni di età nell'analizzare problematiche complesse ho potuto riscontrare nella mia attività che **molti alunni di quell'età non sono ancora pronti a gestire le diverse fasi che caratterizzano lo studio delle equazioni parametriche e meno ancora pronti per sintetizzare i risultati che devono tirare fuori**.

Nel periodo dal 1985-86 al 2005, allorché noi Docenti di matematica ci occupavamo anche dell'insegnamento dell'informatica, abbiamo avuto a disposizione **lo strumento dei diagrammi di flusso** con cui spesso abbiamo pianificato i percorsi logici da realizzare per la risoluzione di un determinato problema. La possibilità di riportare dei testi scritti all'interno dei simboli grafici dei flow-chart(1) è stata un'occasione per esprimere in forma testuale o simbolica, in modo sintetico, chiaro e rigoroso il da farsi. Siamo tutti cresciuti migliorando giorno dopo giorno, esperienza dopo esperienza, le nostre capacità comunicative. Innumerevoli volte, a beneficio degli Studenti, è stato rappresentato sulla lavagna il diagramma di flusso che descriveva l'algoritmo per la risoluzione di un'equazione di primo grado ridotta alla forma più semplice: ax+b=0. Gli Studenti, tutti, seguendo quel diagramma sono riusciti a mettere in atto la sequenza delle operazioni necessarie per "la discussione di un'equazione di primo grado" anche quando l'equazione non era semplicissima; la struttura più complessa veniva decomposta in tante sottostrutture (le famose "procedure"), ciascuna delle quali era destinata alla risoluzione di un particolare sottoproblema componente del problema più generale.

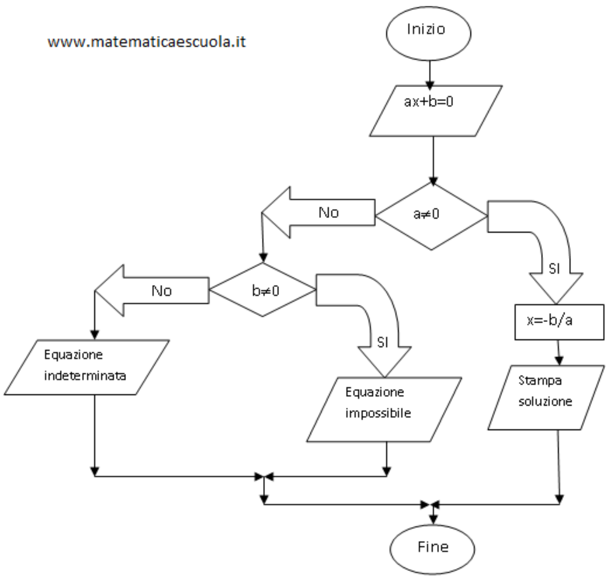

Figura 1- Un esempio di flow-chart per la discussione dell'equazione di primo grado ridotta alla forma normale nell'incognita x.

(1) che erano sostanzialmente figure geometriche come un parallelogramma (per comunicare azioni di input e di output), un rettangolo (per comunicare che in quella fase si dovevano eseguire delle elaborazioni, nel nostro caso matematiche), un rombo (che si utilizzava come blocco decisionale, cioà come momento in cui lo Studente-Programmatore deve scegliere quale percorso seguire),…

Successivamente questo strumento è venuto meno, tant'è che sugli attuali libri di testo non c'è più alcuna traccia di quello strumento metodologico.

Per tornare alla risoluzione di un'equazione parametrica io pendo che sia la parte più complessa del programma di algebra previsto nel primo anno e proprio per questo non è raro che alcuni Docenti decidano di affrontare organicamente l'argomento all'inizio del secondo anno del Liceo quando gli Studenti, cresciuti fisicamente di qualche mese e magari hanno maturato anche altre esperienze formative, si trovano nel periodo iniziale della frequenza della Seconda Classe liceale, sono più rilassati e nient'affatto stressati dalle innumerevoli prove di verifica loro richieste che caratterizzano la fase finale della frequenza in ogni anno di corso.

Per queste considerazioni, ritengo che se i Colleghi Docenti di Matematica che insegnano nelle prime Classi del Liceo decidono di rinviare lo studio della risoluzione delle equazioni letterali (sinonimo di parametriche) di primo grado, intere o fratte, alla fase iniziale dell'anno successivo adottano una saggia decisione perché avranno modo di sviluppare il lavoro necessario per la trattazione dell'argomento in una situazione generale della classe più favorevole all'impegno mentale richiesto dalla problematica.

Come affrontare lo studio di un'equazione parametrica intera o fratta

Suggerisco questi accorgimenti.

1. Lo Studente deve innanzitutto osservare attentamente la struttura algebrica con cui si presenta la forma dell'equazione. Se nota la **presenza** di frazioni **al** cui **denominatore** figura qualche lettera (parametro) o addirittura la stessa **incognita** (solitamente indicata con x) allora è necessario che egli individui le cosiddette condizioni di esistenza (C.D.E.) per l'equazione in quanto tale. Ricordiamo che una frazione ha senso se il suo denominatore è diverso da zero, pertanto si dovrà imporre che ciascun denominatore contenente qualche lettera sia diverso da zero, vale a dire che lo Studente deve esplicitare chiaramente quali valori numerici non possono essere assegnati ad ogni particolare lettera presente al denominatore di una o più frazioni. Ciò fatto avrà individuato quei valori numerici che nella fase conclusiva della risoluzione dell'equazione saranno riesaminati uno per uno.
2. **Quando impostare le C.D.E.?**
   Per poter individuare correttamente le C.D.E. è necessario che tutti i denominatori delle frazioni che contengono qualche lettera siano scomposti in fattori di primo grado, dopo di che, se nell'espressione iniziale dell'equazione sono presenti termini nei due membri è opportuno che si determini il **minimo comun denominatore** (m.c.d.) fra tutti i denominatori fattorizzati in precedenza. Ebbene, le C.D.E. consisteranno nell'imporre che ciascun fattore letterale presente nel m.c.d. sia diverso da zero. A questo punto, operativamente, si **dovranno risolvere tante equazioni di primo grado quanti sono i fattori letterali del m.c.d..** Eseguito questo studio si saranno determinati i valori che le singole lettere (compresa l'incognita) non potranno assumere, altrimenti si farebbe perdere di significato all'equazione in esame.
3. Si passa così alla **fase della semplificazione algebrica dell'equazione**. Nell'ipotesi che nell'espressione algebrica dell'equazione siano presenti una o più frazioni in uno o in entrambi i membri, una volta ricondotti i due membri ad un'unica frazione avente come denominatore il m.c.d. calcolato prima, si applica opportunamente il secondo principio di equivalenza delle equazioni; precisamente, si moltiplicano entrambi i membri dell'equazione trasformata proprio per il polinomio fattorizzato rappresentato dal m.c.d., che, nel rispetto delle C.D.E. già fissate, è

diverso da zero. In tal modo si libera l'equazione dai denominatori riducendola ad una forma algebricamente più snella. A questo punto si procede con il calcolo letterale eseguendo le operazioni residue necessarie (somme, prodotti), si trasporteranno tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e gli altri termini (detti termini noti) al secondo membro. Si ricorderà che lo spostamento di un termine da un membro all'altro comporta che quel termine cambi di segno (principio del trasporto).
Ciò fatto si procederà con la riduzione dell'equazione alla forma normale, come indicato nel successivo punto.

4. **Riduzione dell'equazione alla forma normale**
Con questa espressione si intende la forma dell'equazione nella quale al primo membro figura la forma algebrica che vede l'incognita comparire una sola volta e la stessa è moltiplicata per la restante parte letterale che dovrà essere scomposta opportunamente in fattori; analogamente, si dovrà scomporre in fattori l'eventuale polinomio che figurerà al secondo membro. Solo dopo aver ottenuto queste forme algebriche per i due membri dell'equazione avrà inizio la **fase della discussione dell'equazione** come si vedrà nel successivo punto programmatico.
5. **Discussione dell'equazione**
   a. Si analizzano tutti i fattori che compongono il coefficiente dell'incognita per riconoscere per quali valori delle lettere (parametri) in essi presenti gli stessi si annullano. **Si costruisce l'insieme A degli zeri del coefficiente dell'incognita**.
   b. Si procede osservando che per ogni numero reale non appartenente all'insieme A l'equazione ha il coefficiente dell'incognita diverso da zero, perciò è determinata ed ammette come radice il numero reale dato dal rapporto fra il termine noto ed il coefficiente dell'incognita. Si scrive operativamente questa frazione e, considerato che nel precedente punto (4.) il numeratore ed il denominatore sono stati scomposti in fattori, con quelli del denominatore che sono tutti diversi da zero, se è possibile semplificare la frazione ottenuta la si "riduce ai minimi termini". L'espressione ottenuta, per ciascuno dei valori che possono essere attribuiti alle lettere residue (che sono diverse dall'incognita), nel rispetto delle precedenti C.D.E., rappresenterà un ben preciso **valore numerico che per essere accettato come soluzione dell'equazione** in esame **dovrà essere diverso da ciascuno dei valori che eventualmente sono stati dichiarati come non assumibili dall'incognita x nella fase della determinazione delle C.D.E.**. *Se detto valore numerico coincide con uno dei valori che non possono essere assunti dall'incognita x allora va scartato*, in caso contrario si accetta e l'equazione si dirà determinata.
   c. Si badi ora che può succedere che il coefficiente dell'incognita x si possa annullare per particolari valori assegnati ai parametri presenti nel coefficiente e che questi valori, ammissibili perché verificano le C.D.E., possano rendere diverso da zero il termine noto (avere per esempio la forma $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$), evidentemente per detti valori dei parametri l'equazione è impossibile.
   d. Può anche succedere che per qualcuno dei valori ammissibili per i parametri, che ovviamente soddisfano le C.D.E., si annullino sia il coefficiente dell'incognita, sia il termine noto, per cui si presenti la forma $\mathbf{0 \cdot x = 0}$. Evidentemente in questo caso si dirà che l'**equazione** in oggetto è **indeterminata** e che ammette come soluzione un qualsiasi numero reale con esclusione dei valori numerici che non possono essere assunti dall'incognita x che sono stati individuati nella determinazione delle suddette C.D.E.

6. **Fase finale del lavoro svolto**
E' opportuno che lo Studente "raccolga ordinatamente i risultati conseguiti" e presenti sistematicamente i diversi casi che si sono presentati nel corso della discussione. Questo lavoro di sintesi sarà decisamente gratificante in vista di una valutazione dell'elaborato da parte di un valutatore.

*** ***

Esempi di equazioni parametriche di primo grado intere o fratte

Risolvere le equazioni che seguono nell'incognita x.

1. $\frac{x+2}{a-1}=1$, con $a\in\mathrm{R}$
2. $\frac{x-5}{a+3}=\frac{1}{a}$, con $a\in\mathrm{R}$
3. $\frac{2x-a}{x+1}=3a$, con $a\in\mathrm{R}$
4. $\frac{3}{x-1}=\frac{2}{a+1}$, con $a\in\mathrm{R}$
5. $\frac{5}{x-a}=\frac{2}{2a+1}$, con $a\in\mathrm{R}$

Elaborazioni

1. $\frac{x+2}{a-1}=1$, con $a\in\mathrm{R}$.
   a. L'equazione è razionale intera perché l'incognita non figura al denominatore. La condizione di esistenza per l'equazione è $a\neq1$ (C.D.E.).
   b. Nel rispetto della (C.D.E.) l'equazione si riduce alla forma $x+2=a-1$, da cui si ottiene $x=a-3$.
   c. Concludiamo che
      i. per $a=1$ l'equazione perde di significato;
      ii. per $a\neq1$ l'equazione è determinata ed ammette come soluzione $x=a-3$.
2. $\frac{x-5}{a+3}=\frac{1}{a}$, con $a\in\mathrm{R}$.
   a. L'equazione è razionale intera e le (C.D.E.) condizioni di esistenza sono: $(a\neq-3)\wedge(a\neq0)$.
   b. Nel rispetto delle (C.D.E.) si può liberare l'equazione dai denominatori e ridurla alla forma normale. Si ha:
   $x-5=\frac{a+3}{a}\rightarrow x=\frac{6a+3}{a}$.
   c. Sussistono i seguenti casi:
      i. Se $(a=-3)\vee(a=0)$ l'equazione perde di significato.
      ii. Se $(a\neq-3)\wedge(a\neq0)$ l'equazione è determinata ed ammette come soluzione $x=\frac{6a+3}{a}$.

3. $\dfrac{2x-a}{x+1}=3a$,con $a\in\mathbb{R}$
    a. L'equazione è letterale razionale fratta e l'unica condizione di esistenza (C.D.E.) è $x\neq-1$.
    b. Nel rispetto della (C.D.E.) liberiamo l'equazione dal denominatore; per questo moltiplichiamo i due membri per il binomio (x+1) e riduciamo l'equazione alla forma normale.

    $$(x+1)\cdot\frac{2x-a}{x+1}=3a(x+1)\to 2x-a=3ax+3a\to(2-3a)x=4a \qquad \text{(3b)}$$

    c. Discutiamo l'equazione ottenuta
        i. Il coefficiente dell'incognita si annulla per a=2/3; per questo valore del parametro l'equazione si riduce alla forma $0x=\frac{8}{3}$ ed evidentemente non ammette soluzioni. L'**equazione** è dunque **impossibile** se a=2/3.
        ii. Se $a\neq\frac{2}{3}$ dall'equazione (3b) si ricava $x=\frac{4a}{2-3a}$. Occorre ora **controllare l'accettabilità del valore ottenuto come soluzione dell'equazione** in esame e per questo è necessario stabilire per quali valori del parametro a la frazione 4a/(2-3a) assume valori diversi da -1 (come indicato dalle C.D.E.). Risolviamo l'equazione nell'incognita a.

        $$\frac{4a}{2-3a}=-1\to 4a=-2+3a\to a=-2.$$

        Pertanto
        1. **se a=-2** il valore 4a/(2-3a) non è accettabile come soluzione dell'equazione perché contrasta con le C.D.E. e quindi **l'equazione non ha soluzioni**, perciò è impossibile;
        2. se $\left(a\neq\frac{2}{3}\right)\wedge(a\neq-2)$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x=\frac{4a}{2-3a}$.

4. $\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2}{a+1}$, con $a\in\mathbb{R}$
    a. L'equazione è letterale fratta. Le (C.D.E.) sono ($x\neq1$)$\wedge$ ($a\neq-1$).
    b. Nel rispetto delle (C.D.E.) liberiamo l'equazione dai denominatori e riduciamola alla forma normale.

    $$\frac{3}{x-1}=\frac{2}{a+1}\to\frac{3(a+1)}{(x-1)(a+1)}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(a+1)}\xrightarrow{\text{Appl.il.2° Princ.d.eq.}}\frac{3(a+1)}{\cancel{(x-1)(a+1)}}=\frac{2(x-1)}{\cancel{(x-1)(a+1)}}\to$$

    $$2x=3a+5\to x=\frac{3a+5}{2} \qquad \text{(4b).}$$

    c. Poiché per le (C.D.E.) deve risultare $x\neq1$ è necessario stabilire se il valore trovato, che dipende dal parametro a, con $a\neq-1$, per qualche valore ammissibile per a coincide con il valore 1, che non può essere assunto da x. Risolviamo dunque la seguente equazione nell'incognita a:

    $$\frac{3a+5}{2}=1\to a=\frac{2-5}{3}=-1.$$

Poiché l'espressione letterale $\frac{3a+5}{2}$ può assumere il valore 1 (valore non ammissibile per *x*) solo per *a*=-1, sapendo che per le (C.D.E.) risulta (*a*≠-1), concludiamo che la suddetta espressione non sarà uguale ad uno **al variare di *a* nel suo dominio** e quindi **il valore trovato per *x* è accettabile come soluzione** e l'equazione in esame è determinata.

5. $\frac{5}{x-a}=\frac{35}{2a+1}$, con $a\in\mathbb{R}$
   a. L'equazione è letterale fratta. Le (C.D.E.) sono ($x\neq a$)$\wedge$ ($a\neq -1/2$).
   b. Nel rispetto delle (C.D.E.) e applicando il secondo principio di equivalenza liberiamo l'equazione dai denominatori e riduciamola alla forma normale; ciò fatto determineremo il valore dell'incognita. Si ha:

   $$\frac{5}{x-a}=\frac{35}{2a+1}\to\frac{1}{x-a}=\frac{7}{2a+1}\to\frac{(2a+1)}{(x-a)(2a+1)}=\frac{7(x-a)}{(x-a)(2a+1)}\xrightarrow{Applicando il 2° Princ.}$$

   $$7(x-a)=2a+1\to x=\frac{9a+1}{7}.$$

   c. Osserviamo ora che il **valore trovato per *x* per essere accettabile deve verificare la condizione *x*≠*a***, pertanto vediamo quando sussiste l'uguaglianza

   $$\frac{9a+1}{7}=a \qquad (5c).$$

   Questa è soddisfatta solo per $a=-\frac{1}{2}$.

   Ebbene, il valore trovato per *x* coincide con il valore *a*, che non può essere accettato, solo se *a*=-1/2. Poiché il precedente valore è stato determinato operando sull'equazione nel rispetto delle (C.D.E.), quindi avendo ritenuto che fosse anche *a*≠-1/2, evidentemente questa esclude che possa verificarsi l'uguaglianza (5c), quindi **il suddetto valore è accettabile come soluzione dell'equazione**.