

## Il volo di un paracadutista

### Problema<sup>(1)</sup>

Un paracadutista di massa  $m=60\text{Kg}$  si lascia cadere da una quota di 1500 metri con velocità iniziale nulla. Il paracadutista in caduta libera acquista gradualmente velocità e decide di aprire il paracadute dopo 12s. All'apertura il paracadute esercita una resistenza aerodinamica meglio descritta dalla legge  $R_v=cv^2$ , dove  $c=2\text{Kg/m}$ . Quali sono i valori della velocità e della quota raggiunta dopo altri 5s? In quale istante il paracadutista toccherà terra e con quale velocità?

### Soluzione

#### Analisi della situazione<sup>(2)</sup>.

Nella prima parte del volo, che dura 12s, il moto del paracadutista è rettilineo uniformemente accelerato. Nel testo lo si definisce moto in caduta libera, quindi si suppone di poter trascurare la resistenza dell'aria.

Nella seconda parte del volo, della durata di 5s, il moto è determinato dalla risultante delle due forze agenti sul paracadutista: la forza peso dell'uomo (si trascura il peso del paracadute) e la resistenza dell'aria  $R_v$ , la cui intensità dipende dal quadrato della velocità. In questa fase la velocità del paracadutista diminuisce notevolmente in modulo.

Nella terza parte, la cui durata deve essere determinata, si può ritenere che il volo del paracadutista sia rettilineo uniforme (in assenza di vento), cioè che la caduta avvenga con velocità di regime sostanzialmente costante. Infatti, allorché la forza di resistenza dovuta all'aria uguaglierà il peso del paracadutista da quel momento la risultante delle forze sarà nulla, quindi non ci sarà accelerazione e dunque la velocità resterà costante.



#### Impostazione della soluzione

Per la descrizione delle grandezze cinematiche del moto assumiamo come asse di riferimento un asse verticale, orientato verso l'alto, con origine sul suolo.

#### Moto nell'intervallo [0;12](s)

La legge della componente cartesiana scalare della velocità lungo l'asse di riferimento è  $V=-gt$ , mentre quella della posizione (quota) è

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0, \text{ con } y_0 = 1500\text{m}.$$

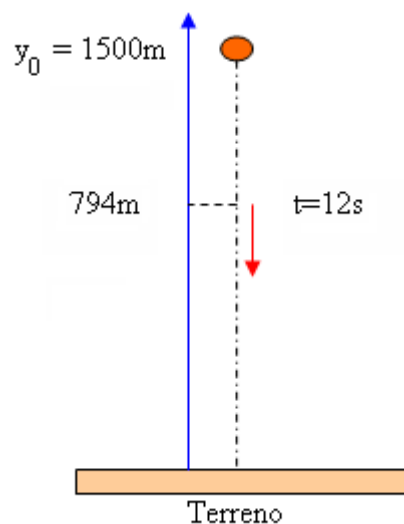
Nell'istante  $t=12\text{s}$  risulta  $V=-9,81 \cdot 12\text{m/s} = -117,72\text{m/s}$ ;

$$y(t=12\text{s}) = \left( -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 12^2 + 1500 \right) \text{m} = 793,68\text{m} \approx 794\text{m}$$

#### Moto nell'intervallo [12;17](s)

Per ricavare la legge della velocità e successivamente quella della quota in questa seconda fase è necessario impostare l'equazione differenziale dedotta dalla seconda legge della dinamica applicata alla massa del paracadutista. L'espressione della legge è

$$m\vec{g} + \vec{R}_v = m\vec{a} \quad (1)$$



<sup>(1)</sup> Problema n.2 assegnato nella prova d'esame di Fisica del 22 febbraio 2008 nella facoltà di Ingegneria Gestionale "La Sapienza".

<sup>(2)</sup> L'immagine dei paracadutisti in volo è stata reperita in internet.

che proiettata sull'asse di riferimento fornisce l'espressione scalare

$$-mg + cv^2 = ma \rightarrow -mg + cv^2 = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{mdv}{cv^2 - mg} = dt \quad (1.1)$$

Per comodità di espressione azzeriamo ancora il tempo e consideriamo dunque l'equazione nell'intervallo  $[0;5](s)$ .

Integrando la (1.1) si ha

$$\int_{t=0s}^t \frac{mdv}{cv^2 - mg} = \int_0^t dt$$

Occupiamoci del calcolo dell'integrale indefinito al primo membro.

$$\int \frac{mdv}{cv^2 - mg} = \frac{m}{c} \int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{c}} \quad \text{poniamo per semplicità} \quad \frac{mg}{c} = k^2, \text{ quindi con } k = \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

Si ha

$$\int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{c}} = \int \frac{dv}{v^2 - k^2}$$

Si riconosce che per la funzione integranda si può scrivere

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{A}{v - k} + \frac{B}{v + k}, \text{ con } \left( A = \frac{1}{2k} \right) \wedge \left( B = -\frac{1}{2k} \right)$$

e dunque l'integrale in esame vale

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \int \left[ \frac{1}{2k(v - k)} - \frac{1}{2k(v + k)} \right] dv = \frac{1}{2k} \log \left| \frac{v - k}{v + k} \right| + C^*,$$

essendo  $C^*$  una qualsiasi costante reale.

Possiamo allora scrivere

$$\frac{m}{c} \int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{c}} = \frac{m}{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{mg}} \log \left| \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{c}}} \right| + C^* \quad (2)$$

Passando al calcolo dell'integrale definito nell'intervallo  $[0;t](s)$ , ricordiamo che per  $t=0s$  risulta  $v=-117,72m/s$ . Pertanto si ha

$$\int_{t=0s}^t \frac{mdv}{cv^2 - mg} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{m}{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{mg}} \log \left| \frac{v(t) - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v(t) + \sqrt{\frac{mg}{c}}} \right| - \frac{60Kg}{2Kg m^{-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2Kg m^{-1}}{60Kg \cdot 9,81ms^{-2}}} \cdot \log \left| \frac{-117,72 - \sqrt{\frac{60 \cdot 9,81}{2}}}{-117,72 + \sqrt{\frac{60 \cdot 9,81}{2}}} \right| (s) = t ;$$

eseguendo i calcoli si riscontra che

$$\frac{60Kg}{2Kg m^{-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2Kg m^{-1}}{60Kg \cdot 9,81ms^{-2}}} \cdot \log \left| \frac{-117,72 - \sqrt{\frac{60 \cdot 9,81}{2}}}{-117,72 + \sqrt{\frac{60 \cdot 9,81}{2}}} \right| (s) \approx 15 \cdot 0,05829 \cdot 0,29355(s) \approx$$

0,25667(s),

per cui, dopo aver trasportato nel primo membro sotto al segno di radice la frazione  $m/c$ , si ha

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{cg}} \log \left| \frac{v(t) - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v(t) + \sqrt{\frac{mg}{c}}} \right| = 0,25667 + t \rightarrow \log \left| \frac{v(t) - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v(t) + \sqrt{\frac{mg}{c}}} \right| = 2 \cdot \sqrt{\frac{cg}{m}} (0,25667 + t) \rightarrow$$

$$\left| \frac{v(t) - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v(t) + \sqrt{\frac{mg}{c}}} \right| = e^{2 \cdot \sqrt{\frac{cg}{m}} (0,25667 + t)} \quad (3)$$

Facciamo notare che

$$k = \sqrt{\frac{mg}{c}} = \sqrt{\frac{60 \text{ Kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{2 \text{ Kg m}^{-1}}} \approx 17,155 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e che il numeratore e il denominatore della frazione argomento del valore assoluto sono negativi, perciò il valore della frazione è positivo, dunque si può eliminare il segno di modulo.

Dalla (3) si ricava l'espressione della velocità in funzione del tempo.

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \left[ \frac{2}{1 - e^{2 \cdot \sqrt{\frac{cg}{m}} (0,25667 + t)}} - 1 \right],$$

e sostituendo i valori ai parametri presenti,

$$v(t) = 17,16 \left[ \frac{2}{1 - e^{1,144(0,25667 + t)}} - 1 \right] \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \quad (4)$$

Finalmente, se nella (4) si pone  $t=5\text{s}$  si trova la velocità del paracadutista dopo 5s dall'apertura del paracadute. Si ha

$$v(t=5\text{s}) = -17,239 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Il segno negativo indica che il paracadutista si muove nel verso opposto a quello scelto come positivo per l'asse verticale di riferimento.

Negli istanti successivi all'istante  $t=5\text{s}$  la velocità del paracadutista rimane sostanzialmente invariata, cioè il paracadutista percorre l'ultimo tratto con moto uniforme.

In **Figura 1** è riportato il grafico della velocità del paracadutista nei primi otto secondi dopo l'apertura del paracadute.

Comando in GeoGebra per ottenere il grafico della velocità

curva[t, 17.155\*(2/(1-exp(1.144\*(0.25667+t)))-1), t, 0, 8]

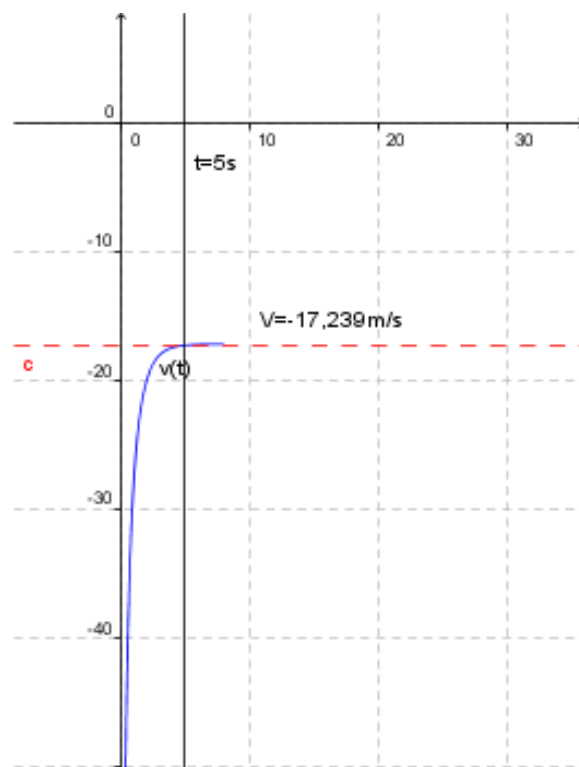


Figura 1

**Ricerca della legge della quota nell'intervallo [0;5](s)**

Ora disponiamo della legge della velocità  $V(t)$ . Detta  $y(t)$  la legge della quota, sappiamo che sussiste l'uguaglianza

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (5)$$

Poniamo  $y_0 = 794m$  e scriviamo in forma semplificata l'espressione della legge della velocità

$$v(t) = 17,155 \left[ \frac{2}{1 - e^{1,144(0,25667+t)}} - 1 \right] \left( \frac{m}{s} \right) \quad \text{ponendo semplicemente}$$

$$v(t) = h \left[ \frac{2}{1 - e^{at+b}} - 1 \right] \left( \frac{m}{s} \right), \text{ con } a = 1,144, \quad b = 0,29363, \quad h = 17,155 \text{ costanti.}$$

Dalla (5) otteniamo

$$dy = v dt \rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int_{t=0s}^t h \left( \frac{2}{1 - e^{at+b}} - 1 \right) dt \rightarrow y - y_0 = 2h \int_{t=0s}^t \frac{dt}{1 - e^{at+b}} - [ht]_0^t \quad (6)$$

Preoccupiamoci ora del calcolo **dell'integrale indefinito**

$$\int \frac{dt}{1 - e^{at+b}} \quad \text{che affrontiamo con il **metodo di sostituzione**.}$$

$$\text{Con } e^{at+b} = u \rightarrow t = \frac{1}{a}(-b + \log u) \rightarrow dt = \frac{1}{a \cdot u} du \rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{1 - e^{at+b}} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u(1-u)} = \frac{1}{a} \int \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{a} (\log|u| - \log|1-u|) + C^* =$$

$$\frac{1}{a} [(at+b) - \log|1 - e^{at+b}|] + C^*,$$

dove  $C^*$  è una costante additiva arbitraria che si eliminerà nel processo di integrazione definita.

Tornando all'integrale definito residuo si ha

$$2h \int_{t=0s}^t \frac{dt}{1 - e^{at+b}} = 2h \cdot \frac{1}{a} [(at+b) - \log|1 - e^{at+b}|]_0^t = \frac{2h}{a} \{ [(at+b) - \log|1 - e^{at+b}|] - [b - \log|1 - e^b|] \}$$

e quindi, in definitiva, la (6) diventa

$$y - y_0 = \frac{2h}{a} \{ [(at+b) - \log|1 - e^{at+b}|] - [b - \log|1 - e^b|] \} - ht \quad (7)$$

Sostituendo ad  $a$ ,  $b$ ,  $h$  ed  $y_0$  i rispettivi valori numerici si ottiene la forma analitica della **legge oraria della quota del paracadutista** dopo l'apertura del paracadute. Si ha

$$a = 1,144, \quad b = 0,29363, \quad h = 17,155, \quad y_0 = 794m;$$

$$y(t) = 794 + 2 \cdot \frac{17,155}{1,144} \{ [(1,144t + 0,29363) - \log|1 - e^{1,144t+0,29363}|] - [0,29363 - \log|1 - e^{0,29363}|] \} - 17,155t \rightarrow$$

$$y(t) = 794 - 17,155t + 30 \{ [(1,144t + 0,29363) - \log|1 - e^{1,144t+0,29363}|] - [0,29363 - \log|1 - e^{0,29363}|] \}$$

ed eseguendo le semplificazioni si perviene alla forma

$$y(t) = 761,75 + 17,165t - 30 \log|1 - e^{1,144t+0,29363}| \quad (8)$$

La (8) esprime la legge oraria richiesta.

**Calcolo della quota del paracadutista nell'istante  $t=5s$** 

Sostituendo nella funzione  $y(t)$  l'istante  $t=5s$  si ha

$$y(t=5s) = (761,75 + 85,825 - 30 \cdot 6,01118)m = 667,25m$$

### Terza parte del volo.

Nell'ipotesi che il paracadutista percorrerà i 667,25m alla velocità raggiunta dopo 5s dall'apertura del paracadute, cioè con velocità di modulo 17,239m/s, impiegherà un numero di secondi pari a

$$N_s = \frac{667,25m}{17,239ms^{-1}} = 38,71s$$

### Conclusione

Il volo del paracadutista ha durata

$$(12+5+38,71)s \approx 55,7s$$

Il paracadutista arriva al suolo con velocità di modulo circa 17,24m/s.

Riportiamo in **Figura 2** il diagramma orario della quota del paracadutista dall'istante in cui si apre il paracadute ( $t=0s$ ) fino all'atterraggio. Nella rappresentazione grafica si nota come l'andamento della quota sia lineare grosso modo dopo 5s e ciò vuol dire, come abbiamo già precisato, che la discesa avviene con velocità costante.

Comando in GeoGebra per ottenere il grafico della quota del paracadutista.

curva[t,761.75+17.155t-30\*ln(abs(1-exp(1.144\*t+0.29363))),t,0,43.71]

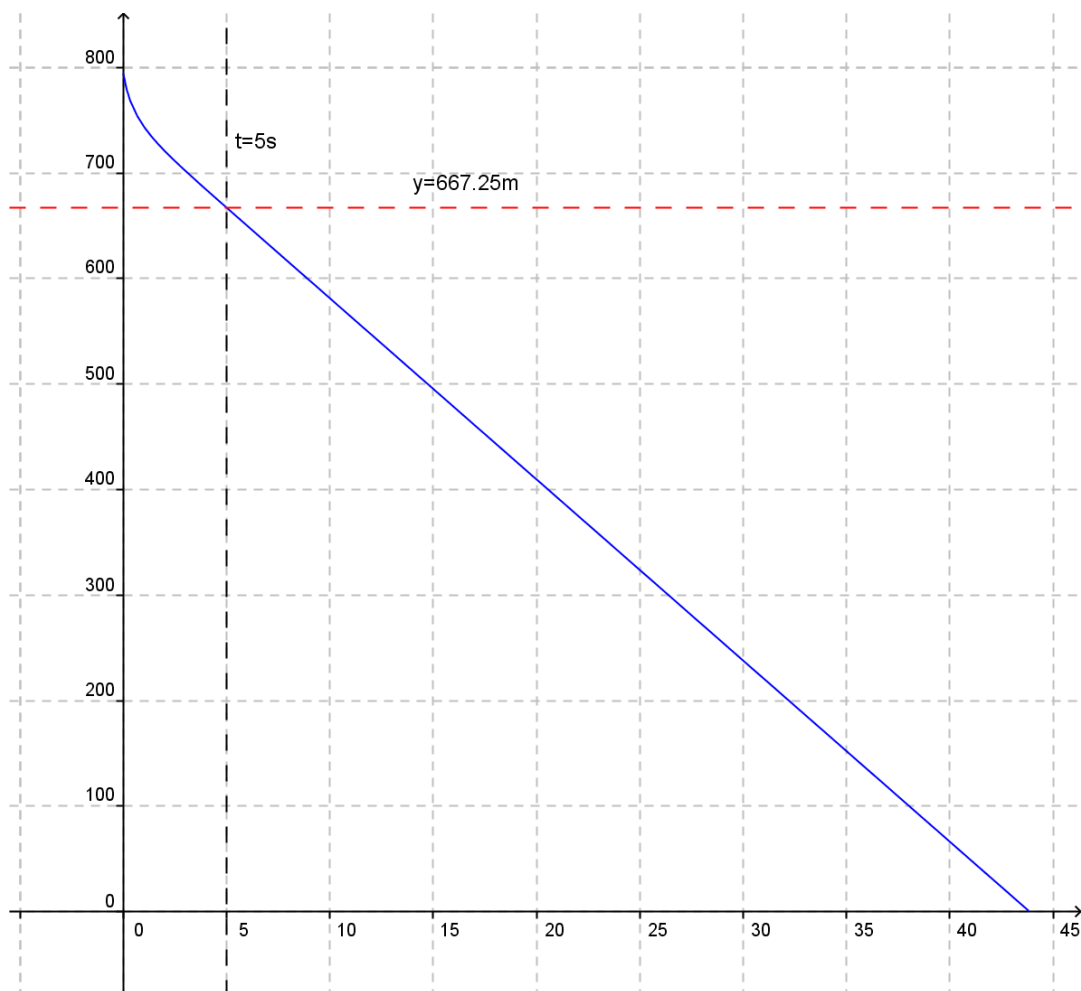


Figura 2