La struttura di un semaforo

Problema

Un semaforo è appeso alla struttura riportata in figura. E' noto che:

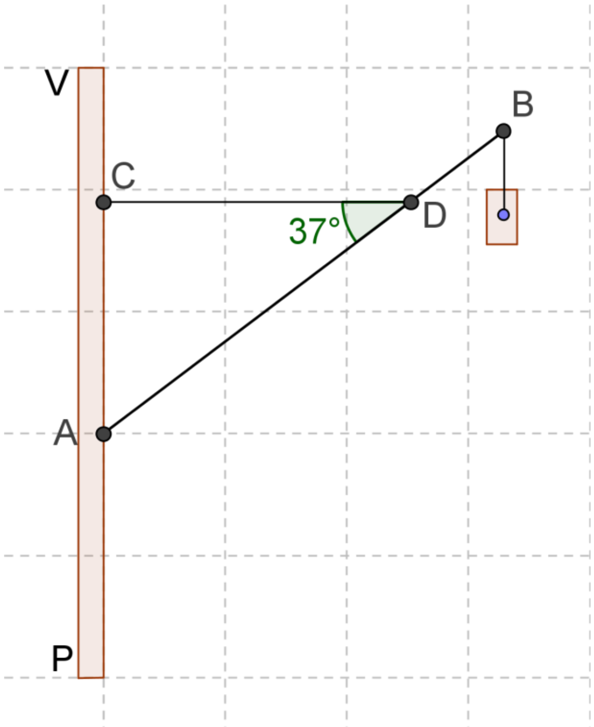
l'asta metallica AB è omogenea e lunga 7,5m;

il tirante CD, di massa trascurabile, è parallelo al piano orizzontale (della strada) e forma con la direzione dell'asta un angolo di ampiezza 37°, essendo AC=3,8m;

la massa del semaforo è 12Kg.

Determinare la tensione **T** del tirante, il modulo e le componenti orizzontale e verticale della reazione vincolare **R** che il palo PV esercita in A sull'asta AB.

Determinare l'ampiezza dell'angolo che la reazione vincolare **R** forma con la verticale per A.



Soluzione

Nella risoluzione del problema supponiamo che le forze che agiscono sull'asta AB giacciano nel piano verticale contenente l'asta e che il vincolo in A tra il palo PV e l'asta non presenti attrito.

Completiamo la figura indicando le forze che agiscono sull'asta che sono:

la forza peso $\vec{F_1}$ del semaforo, applicata all'estremità B dell'asta e diretta lungo la verticale;

la forza peso $\vec{F_2}$ dell'asta, applicata nel baricentro O dell'asta; questo punto coincide con il punto medio di AB perché l'asta è per ipotesi omogenea;

la forza di tensione $\vec{T}$ del cavo CD, applicata nel punto D dell'asta, con verso da D a C;

la forza di reazione vincolare $\vec{R}$ che il palo PV esercitata nell'estremo A dell'asta.

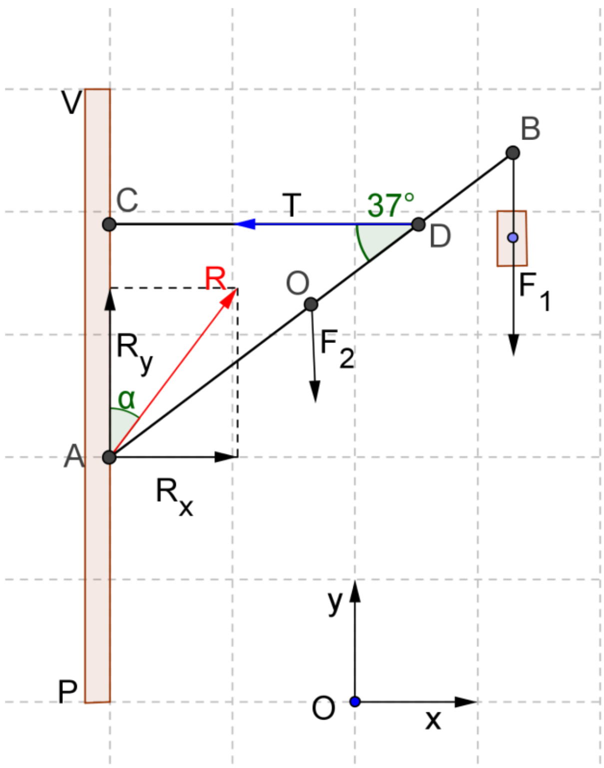


Figura 2

La figura di riferimento è la **Figura 2**.

Per descrivere algebricamente le leggi fisiche della statica è necessario introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano verticale; questo riferimento è indicato in Figura 2 in basso con xOy.

Le due leggi che garantiscono l'equilibrio dell'asta AB, e quindi del semaforo, sono:

- la somma delle forze agenti sull'asta essere nulla: $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{T}+\vec{R}=0$ (1)
- la somma dei momenti delle forze agenti sull'asta, calcolati rispetto ad un polo qualsiasi, essere nulla. Scegliendo come polo per i momenti l'estremo A l'equazione vettoriale è:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{F_2}+\overrightarrow{AD}\wedge\vec{T}=0 \quad (2)$$

Nell'equazione (2) non figura il momento della forza $\vec{R}$ perché lo stesso è nullo in quanto la retta di azione della forza passa per il polo A.

Delle equazioni (1) e (2) utilizziamo le espressioni scalari proiettandole sugli assi cartesiani.

Dell'equazione (1) consideriamo le **proiezioni scalari sugli assi Ox, Oy**, giacché tutte le forze che agiscono sono contenute nel piano verticale xOy; dette proiezioni devono essere nulle.

$\vec{T}=T_x\vec{i}+T_y\vec{j}$, risulta $T_x=-T$, $T_y=0$;

$\vec{F_1}=F_{1x}\vec{i}+F_{1y}\vec{j}$, risulta $F_{1x}=F_1\cos 270°=0$ e $F_{1y}=F_1 sen 270°=-F_1$;

$\vec{F_2}=F_{2x}\vec{i}+F_{2y}\vec{j}$, risulta $F_{2x}=F_2\cos 270°=0$ e $F_{2y}=F_2 sen 270°=-F_2$;

$\vec{T}=T_x\vec{i}+T_y\vec{j}$, risulta $T_x=T\cos 180°=-T$ e $T_y=T sen 180°=0$;

$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}$.

La proiezione scalare della (1) lungo l'asse *x* è: $-T+R_x=0$ (1.1)

La proiezione scalare della (1) lungo l'asse y è: $-F_1-F_2+R_y=0$ (1.2)

Espressione scalare dell'equazione dei momenti

Ricordiamo che il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore perpendicolare al piano individuato dai due vettori con modulo uguale al prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo di ampiezza non superiore a 180° che i due vettori formano.

Poiché i vettori che compaiono nell'equazione (2) giacciono tutti nel piano xOy, supponendo di considerare la terna ortogonale Oxyz, sinistrorsa, l'asse z perpendicolare al piano xOy rappresentato dal piano del foglio (di lavoro) in cui è riportata la figura di riferimento, è uscente dal foglio stesso. I tre vettori dei momenti che figurano nella (2) hanno direzione parallela all'asse z e quindi solo la proiezione scalare lungo questo asse è non nulla.

Onde evitare di riportare esplicitamente tutti i passaggi algebrici per ricavare l'espressione cartesiana scalare suddetta, osserviamo che rispetto al polo A, la forza $\vec{F_1}$ ha momento negativo, cioè tende a far ruotare l'asta in senso orario, e ciò implica che il vettore momento corrispondente $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F_1}$ è entrante rispetto al piano del foglio e dunque la sua componente scalare rispetto all'asse z è negativa; precisamente è:

$$-\overline{AB} \cdot F_1 \cdot sen127° = -\overline{AB} \cdot F_1 \cdot \cos 37°; \qquad (2.1)$$

analogamente, è entrante nel piano del foglio il vettore momento della forza $\vec{F_2}$ e la sua componente scalare rispetto all'asse z è:

$$-\overline{AO} \cdot F_2 \cdot sen127° = -\overline{AO} \cdot F_2 \cdot \cos 37°. \qquad (2.2)$$

Per quanto concerne il momento della tensione $\vec{T}$ osserviamo che l'azione di questa forza determina una rotazione in senso antiorario intorno al polo A e quindi il corrispondente vettore momento ha la direzione positiva dell'asse z. L'espressione della componente scalare è:

$$\overline{AD} \cdot T \cdot sen(180° - 37°) = \overline{AD} \cdot T \cdot sen37°$$

Prima di scrivere la somma delle tre componenti scalari dei tre momenti notiamo che dal triangolo rettangoloACD si deduce la relazione

$\overline{AD} = \dfrac{\overline{AC}}{sen37°}$, con $\overline{AC} = 3{,}8m$, e in definitiva si ha

$$\overline{AD} \cdot T \cdot sen37° = \frac{\overline{AC}}{sen37°} \cdot T \cdot sen37° = \overline{AC} \cdot T. \qquad (2.3)$$

Sommando le espressioni scalari (2.1), (2.2), (2.3) si ottiene l'espressione scalare della (2) proiettata sull'asse z:

$$-\overline{AB} \cdot F_1 \cdot \cos 37° - \overline{AO} \cdot F_2 \cdot \cos 37° + \overline{AC} \cdot T = 0 \qquad (2.4)$$

Per determinare le incognite T, R_x, R_y è necessario risolvere il sistema formato con le equazioni (1.1), (1.2), (2.4).

Risoluzione del sistema

$$\begin{cases} -T + R_x = 0 \\ -F_1 - F_2 + R_y = 0 \\ -\overline{AB} \cdot F_1 \cdot \cos 37° - \overline{AO} \cdot F_2 \cdot \cos 37° + \overline{AC} \cdot T = 0 \end{cases}$$

con $\overline{AB}=7,5m$, $\overline{AO}=\overline{AB}/2$, $\overline{AC}=3,8m$.

I valori che si ottengono sono

$$\begin{cases} R_x = T = 216,5N \\ R_y = F_1 + F_2 = (12+8)\,Kg \cdot 9,81\dfrac{m}{s^2} = 196,2N \\ T = \dfrac{\left(\overline{AB}\cdot F_1 + \overline{AO}\cdot F_2\right)\cdot \cos 37°}{\overline{AC}} = 216,5N \end{cases}$$

Osservazione

I valori ottenuti per le componenti scalari R_x, R_y sono positivi e ciò indica che la previsione fatta sulla direzione e il verso della reazione vincolare $\vec{R}$ riportata nel disegno di riferimento è corretta.

Valore dell'intensità di $\vec{R}$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(216,5)^2 + (196,2)^2}\,N \simeq 292N$$

Angolo formato da $\vec{R}$ con la direzione del palo di sostegno PV

In figura 2 è indicato l'angolo α formato da $\vec{R}$ con la verticale per A. Si ha

$$tg\alpha = \frac{R_x}{R_y} = \frac{216,5N}{196,2N} \to \alpha = arctg(1,10346) \simeq 47°48'$$