La potenza di un fucile a molla

Sunto

E' possibile determinare la potenza di un fucile a molla quando sono note la costante elastica ***K*** della molla, la misura ***d*** della compressione e la massa ***m*** del proiettile sparato?
La risposta è affermativa. Vedremo che è possibile e servono proprio i tre parametri ***K***, ***d***, ***m*** indicati.

Discussione del problema

Cosa può significare l'espressione "potenza del fucile"?
Com'è noto, la potenza è una grandezza fisica data dal rapporto tra energia e tempo e la sua unità di misura nel sistema internazionale (S.I.) è il watt: J/s=W. Si può calcolare, ad esempio, la potenza sviluppata da una persona che esegue un certo lavoro in un tempo prestabilito. Immaginiamo una persona di 70 Kg che salga su per una scala di un dislivello di 3m impiegando 6s. Si può determinare la potenza sviluppata in quell'intervallo di tempo. Come si calcola?
Il lavoro che deve compiere la persona è quello sviluppato dalla forza fisica che deve applicare per vincere la forza peso agente sul proprio corpo. Se la persona sale lungo la verticale senza accelerazione allora applica sul suo corpo una forza in intensità pari a quella della forza peso (*mg*[1]), dunque una forza costante. Il lavoro compiuto salendo del tratto *h* è *mgh* ed avendo impiegato $\Delta t=6s$ la potenza sviluppata sarà

$$P=\frac{Lavoro}{\Delta t}=\frac{mgh}{\Delta t}=\frac{70Kg\cdot 9,81ms^{-2}\cdot 3m}{6s}=343,35W$$

Dunque la potenza necessaria dipende dal tempo impiegato per salire. Se la stessa persona fosse in grado di salire lo stesso dislivello in un tempo minore allora sarebbe capace di sviluppare una potenza maggiore di 343,45W. Così, se lo stesso dislivello di 3m fosse superato in 3s la potenza sviluppata sarebbe doppia: P=686,70W.

Il concetto qui esposto per la potenza della persona si applica nello stesso modo all'azione di una qualsiasi forza che sposti il suo punto di applicazione in una qualsiasi direzione. La forza può essere costante o variabile. Certamente, la risoluzione del problema si presenta più semplice se la forza è costante, ma concettualmente è la stessa cosa se ci si deve occupare della determinazione della potenza di una forza variabile. Nel caso che dobbiamo risolvere, calcolare la potenza di un fucile a molla, la forza di cui dobbiamo interessarci è quella esercitata dalla molla del fucile che è stata compressa di un tratto **d**. La molla mentre si distende esercita una forza che varia in intensità secondo la legge di Hooke. Non solo, ma il tempo impiegato dipende anche dalla massa del proiettile che deve lanciare. Vedremo tra breve come procedere per risolvere la questione assumendo che "tutto il lavoro eseguito dalla molla sia utilizzato nel lancio del proiettile", cioè supponendo di poter trascurare ogni forma di attrito nel sistema meccanico.

Impostazione e risoluzione del problema

- **Gli strumenti necessari per lo studio.**

Per studiare il fenomeno fisico dal punto di vista analitico occorre fissare un sistema di riferimento spazio-temporale. Precisamente,

è necessario un asse reale orientato con fissata origine e unità di misura per le lunghezze;
è necessario anche un sistema di riferimento per il tempo.

Interessiamoci dello sparo con il fucile nel caso in cui la canna di questo sia disposta orizzontalmente. Questa scelta semplifica la trattazione del problema perché si possono evitare gli effetti della forza peso agente sul proiettile (e sulla molla). Per la descrizione del moto

[1] Il simbolo g indica l'intensità del campo gravitazionale della Terra nello spazio sede del fenomeno fisico. Assumiamo per g il valore $9,81m/s^2$.

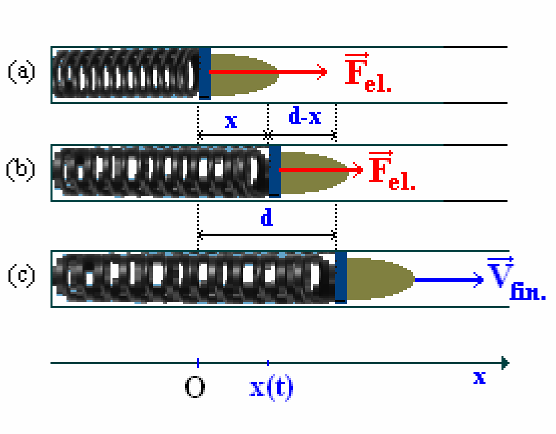
assumiamo l'asse delle ascisse parallelo alla canna del fucile, orientato nel verso di avanzamento della molla, con origine nel punto di contatto tra la molla ed il proiettile quando la molla è compressa al massimo. Poniamo t=0s l'istante in cui si preme il grilletto del fucile ed inizia il processo di distensione della molla.

In figura abbiamo illustrato:

in (a) la configurazione iniziale nell'istante t=0s. E' evidente la forza elastica esercitata dalla molla. Il proiettile è fermo. La molla preme contro il proiettile esercitando la forza elastica il cui modulo, per la legge di Hooke, è $\mathbf{F_{el.}=Kd}$.

In (b) è rappresentata una situazione intermedia. La molla si è già dilatata del tratto x e l'intensità della forza elastica è ora $\mathbf{F_{el.}=K(d-x)}$. In Figura non è rappresentato il vettore velocità del proiettile.

In (c) è rappresentata la molla completamente distesa. In questa posizione sul proiettile, nella direzione del moto, non agisce alcuna forza[2]. La velocità raggiunta dal proiettile è massima ed è rappresentata dal vettore $\vec{V}_{fin.}$.



Dinamica dello sparo

Infine si nota l'asse di riferimento per le ascisse. Ad esso sarà riferita la posizione x(t) dell'estremo libero della molla durante il processo di dilatazione.

- **Calcolo della potenza sviluppata dalla molla**

Come abbiamo già premesso, per calcolare la potenza di un sistema che compie il lavoro L è necessario conoscere la misura Δt dell'intervallo di tempo in cui tale lavoro è compiuto. Nel caso in esame, nell'istante in cui la molla riassume la configurazione di riposo, l'energia elastica che aveva immagazzinato è stata ceduta completamente al proiettile sotto forma di energia cinetica.

E' noto che l'energia elastica immagazzinata da una molla di costante elastica **K** che sia stata compressa del tratto **d** è

$$U_{el.} = \frac{1}{2}Kd^2 . \qquad (1)$$

Se Δt è la misura in secondi del tempo necessario per la distensione della molla, la potenza media sviluppata dalla stessa nel processo di distensione è

$$P_{media} = \frac{Kd^2}{2\Delta t} \qquad (2)$$

Inoltre, se siamo interessati a determinare il modulo della velocità con cui il proiettile viene lanciato basta uguagliare l'energia elastica iniziale della molla all'energia cinetica che si ritrova il proiettile:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mV_{fin.}^2 \qquad (3)$$

da cui

$$V_{fin.} = \sqrt{\frac{K}{m}}d \qquad (4)$$

Per determinare dunque la potenza media della molla abbiamo bisogno di conoscere la durata Δt del processo di distensione. L'obiettivo si consegue risolvendo **un'equazione differenziale del secondo ordine**, più precisamente si deve impostare e risolvere un

[2] Ricordiamo che abbiamo supposto di trascurare ogni forma di attrito (eventuale strisciamento del proiettile sulla superficie della canna del fucile, viscosità dell'aria).

problema di Cauchy del secondo ordine. Vedremo tra breve come procedere. E' bene però precisare subito che è possibile determinare la **potenza istantanea** sviluppata dalla molla nel suo processo di distensione e non solo conoscere la potenza media espressa dalla (2). Occupiamoci di questo aspetto del problema.

- La potenza istantanea

La forza elastica $\vec{F}_{el.}$ che agisce sulla massa *m* e sposta il suo punto di applicazione di $\vec{ds}$ compie il lavoro

$$dL = \vec{F}_{el.} \cdot \vec{ds}\,; \qquad (5)$$

indicando con *dt* la misura del tempo necessario per compiere tale lavoro la potenza sviluppata è

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}_{el.} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F}_{el.} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F}_{el.} \cdot \vec{V} \qquad (6)$$

Nella (6) $\vec{V}$ rappresenta la velocità istantanea con cui si sposta il punto di applicazione della forza nel processo di dilatazione, ovvero dell'estremo libero della molla a contatto con la base del proiettile.

La (6) fornisce la potenza istantanea della molla.

Nel caso in esame la forza elastica e lo spostamento del punto di applicazione sono vettori paralleli e concordi, quindi possiamo scrivere per la potenza l'espressione

$$P = F_{el.} \cdot V \qquad (6.1)$$

- **Impostazione dell'equazione differenziale risolvente**

E' necessario ora tenere sotto controllo la posizione x del punto di applicazione della forza elastica esercitata dalla molla nel processo di distensione perché abbiamo bisogno di conoscere la sua legge oraria x(t) e la derivata prima di questa funzione se vogliamo avere la potenza istantanea e, comunque, per calcolare la durata del fenomeno per la potenza media della molla. E' evidente che la posizione di un punto è determinabile se è stato fissato un punto di riferimento per le posizioni ed un istante temporale di riferimento.

Nella figura riportata abbiamo indicato l'asse di riferimento per le ascisse: è stato scelto come origine delle ascisse il punto di contatto tra il proiettile e l'estremo libero della molla quando questa è compressa al massimo. Per la misura del tempo facciamo riferimento all'istante in cui si preme il grilletto del fucile, dunque all'istante in cui inizia il moto del proiettile, ponendolo uguale a zero: t=0s .

Con queste posizioni, nell'istante t in cui la molla si sarà distesa del tratto x(t), la compressione residua della molla sarà pari a

d-x(t) (*compressione residua della molla*),

e l'intensità della forza elastica esercitata sarà

$$F_{el.} = K\left(d - x(t)\right) \qquad (7).$$

D'altra parte, tenendo conto che nella direzione del moto sul proiettile agisce solo la forza elastica, per la seconda legge della dinamica risulta

$$\vec{F}_{el.} = m\vec{a} \qquad (8)$$

dalla quale si ricava

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{el.}}{m}$$

e quindi l'espressione scalare

$$a = \frac{K\left(d - x(t)\right)}{m} \qquad (9)$$

La (9) è l'equazione differenziale dalla cui risoluzione si ricava la legge oraria del moto del punto di applicazione della forza elastica, quindi anche del proiettile, durante la dilatazione.

Ricordando che l'accelerazione è data dalla derivata seconda della posizione rispetto al tempo possiamo scrivere la (9) nella seguente forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{K}{m}d-\frac{K}{m}x(t) \quad \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=\frac{K}{m}d \qquad (10).$$

La (10) è un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, non omogenea ed a coefficienti costanti e ammette ∞^2 soluzioni; per determinare le soluzioni, dal punto di vista operativo, si deve preliminarmente risolvere **l'equazione omogenea associata** determinando il suo integrale generale, quindi trovare un integrale particolare dell'equazione completa che dovrà essere sommato all'integrale generale dell'equazione omogenea per ottenere l'integrale generale dell'equazione differenziale completa.

Tra le ∞^2 soluzioni c'è anche la soluzione del problema particolare che stiamo studiando. Essa è la funzione x=x(t) che verifica le condizioni iniziali del moto (condizioni al contorno). Quali sono le condizioni iniziali?

Nell'istante iniziale t=0s il punto di applicazione della forza elastica è nell'origine del sistema di riferimento, dunque deve essere soddisfatta la condizione

x(0s)=0 (metri);

inoltre nello stesso istante il punto di applicazione della forza è fermo e, poiché la componente scalare della velocità del suddetto punto durante la distensione della molla è data dalla derivata prima della funzione x(t), dovrà essere soddisfatta l'ulteriore condizione

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0s}=0\left(m/s\right).$$

Il problema che abbiamo da risolvere si presenta sinteticamente nella seguente forma

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{K}{m}x=\dfrac{K}{m}d\\ x(0s)=0(m)\\ \left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0s}=0\left(m/s\right)\end{cases} \qquad (11)$$

e prende il nome di problema di Cauchy.

- **Risoluzione del problema di Cauchy**
  - **Risoluzione dell'equazione omogenea associata**

    Come abbiamo anticipato, si deve determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

    $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=0 \qquad (12)$$

    Di essa si ricercano due integrali particolari della forma $x=e^{\lambda t}$, con λ costante opportuna. Determinando la derivata seconda di questa funzione e imponendo che questa insieme alla funzione stessa soddisfino la (12) si perviene all'equazione caratteristica

    $$\lambda+\frac{K}{m}=0 \Rightarrow \lambda=\pm i\sqrt{\frac{K}{m}}$$

    Senza dilungarci sul processo risolutivo dell'equazione differenziale in esame, ricordiamo che, avendo ottenuto per λ valori immaginari puri, l'integrale generale dell'omogenea (12) ha la seguente forma analitica

    $$x(t)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+C_2 sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) \qquad (13)$$

    con C_1, C_2 costanti reali.
  - Serve a questo punto un integrale particolare dell'equazione completa.

La forma analitica del termine noto dell'equazione completa e la presenza al primo membro della funzione incognita $x(t)$ suggeriscono che un integrale particolare può essere ricercato tra le funzioni costanti, dunque del tipo $x=h$, con h costante reale. Imponendo che una tale funzione sia soluzione dell'equazione completa si determina h. Deve risultare:

$$\frac{K}{m}h=\frac{K}{m}d \Rightarrow h=d$$

Dunque, la funzione costante x(t)=d è un integrale particolare.

Concludiamo che l'integrale generale dell'equazione completa è

$$x(t)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+C_2 sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+d \qquad (14)$$

- **Ricerca della soluzione del problema di Cauchy**

  La soluzione cercata deve verificare le condizioni al contorno. Dunque, deve risultare

  $$x(0)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot 0\right)+\ C_2 sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot 0\right)+d=0 \Rightarrow\ C_1+d=0\Rightarrow C_1=-d\ ;$$

  inoltre

  $$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0s}=\ C_2\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot 0\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{m}}=0\ \ \Rightarrow C_2=0$$

  Dunque la soluzione del problema in esame è la funzione

  $$x(t)=-d\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+d \qquad (15)$$

- **Velocità e accelerazione istantanee del punto di applicazione della forza elastica**.

La (15) rappresenta la legge oraria della posizione del punto di applicazione della forza durante la dilatazione della molla. Possiamo ora determinare la **durata del fenomeno**. L'istante in cui si verifica il distacco del proiettile dall'estremo libero della molla è quello in cui x(t)=d. Risolvendo l'equazione

$$-d\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+d=d \text{ , quindi } \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)=0\,.$$

Ebbene, il primo valore positivo di t che verifica l'equazione ottenuta, e che rappresenta l'istante in cui la molla si sarà completamente distesa, è quello che rende l'argomento della funzione coseno uguale a $\frac{\pi}{2}$, dunque deve sussistere l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{K}{m}}t=\frac{\pi}{2} \qquad \text{e perciò deve essere} \qquad t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (16)$$

Possiamo ora scrivere le espressioni della velocità e dell'accelerazione istante per istante del proiettile nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}\right](s)$.

$$V(t)=\frac{dx(t)}{dt}=d\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right), \qquad (17)$$

$$a(t)=\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d\cdot K}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) \qquad (18).$$

- **Potenza istantanea e potenza media** della molla

Utilizzando la (2)

$$P_{media} = \frac{Kd^2}{2\Delta t}, \qquad (2)$$

con $\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$, si ricava l'espressione della potenza media sviluppata dalla molla del fucile:

$$P_{media} = \frac{Kd^2}{2\Delta t} = \frac{Kd^2}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{Kd^2}{\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Per il valore della potenza istantanea, dalla (6.1), e per le relazioni (7), (15) e (17) possiamo scrivere

$$P(t) = F_{el.}\cdot V = K\cdot[d - x(t)]\cdot\frac{dx(t)}{dt} = K\cdot d\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)\cdot d\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) =$$

$$Kd^2\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right), \text{ con } t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}\right](s).$$

Applicazioni ad un fucile particolare

Dati

Costante elastica della molla: $K = 750N/m$;

compressione della molla: $d = 3,2\cdot 10^{-2}m$;

massa del proiettile: $m = 12g$

Risultati

Velocità di lancio del proiettile: $V_{fin.} = \sqrt{\frac{K}{m}}d = \sqrt{\frac{750Nm^{-1}}{12\cdot 10^{-3}Kg}}\cdot 3,2\cdot 10^{-2}m = 8\frac{m}{s}$

Tempo necessario per la distensione della molla:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{12\cdot 10^{-3}Kg}{750Nm^{-1}}} = \frac{\pi}{5}\cdot 10^{-2}s \approx 0,0063s$$

Potenza media: $P_{media} = \frac{Kd^2}{\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{750Nm^{-1}}{\pi}(3,2\cdot 10^{-2}m)^2\sqrt{\frac{750Nm^{-1}}{12\cdot 10^{-3}Kg}} = 61,1W$

La legge oraria della velocità dell'estremo libero della molla nella fase di dilatazione è $V(t) = 0,8\cdot sen(250t)$,con $0 \le t \le 0,0063$ s.

Riportiamo di seguito il diagramma della legge oraria della velocità dell'estremo libero della molla in fase di dilatazione; il diagramma rappresenta anche la legge oraria della velocità scalare istantanea del proiettile nello stesso intervallo di tempo.