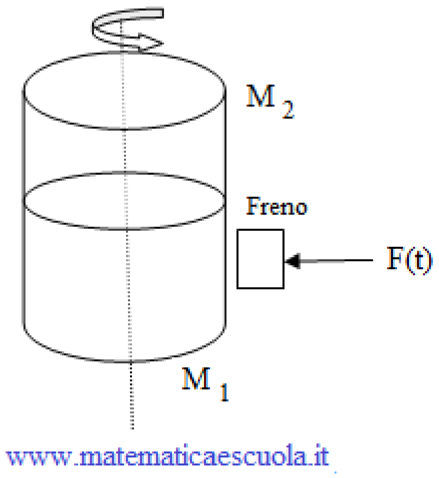
Dinamica rotazionale[1]

Sistema meccanico rotante sottoposto a frenata di intensità variabile…

Problema

Due cilindri cavi sovrapposti aventi lo stesso raggio R e masse M_1, M_2 rispettivamente sono vincolati a ruotare attorno al proprio asse verticale comune. Tra i due cilindri il coefficiente di attrito dinamico è μ_d. Il sistema ruota con velocità angolare ω_0 quando al tempo t=0s un freno (coefficiente di attrito con cilindro μ) viene spinto contro il cilindro inferiore con una forza $F(t)=F_0 \cdot t$ fino al tempo t*. I cilindri ruotano solidalmente fino al tempo t*, quando il cilindro inferiore viene istantaneamente bloccato.
Determinare:

a) la velocità angolare al tempo t*, subito prima del bloccaggio;
b) la variazione $\overrightarrow{\Delta L}$ del vettore momento angolare del sistema dovuta al bloccaggio;
c) l'angolo di cui ruota fino al suo arresto il cilindro superiore rispetto a quello inferiore.



Dati

M_1=1Kg,	massa del primo cilindro, che forma la base del sistema dei due cilindri;
M_2=0,5Kg,	massa del secondo cilindro, situato al di sopra del primo;
R=0,5m,	valore del raggio dei due cilindri;
μ_d=0,2	coefficiente di attrito dinamico fra le superfici dei due cilindri;
ω_0=2,5rad/s	velocità angolare del sistema dei due cilindri nell'istante in cui entra in azione il freno sul cilindro n.1;
μ=0,4	coefficiente di attrito dinamico tra il freno ed il cilindro n.1;
F_0=0,8N/s	coefficiente per il calcolo della forza di attrito variabile nel tempo $F(t)=F_0 \cdot t$, per $0 \le t \le t^*$;
t*=2s	durata dell'intervallo di frenata.

Elaborazioni

a)

a.1)Nell'istante iniziale t=0s il sistema dei due cilindri è in rotazione attorno al proprio asse baricentrale parallelo alle generatrici dei cilindri ed è in possesso dell'energia cinetica rotazionale

[1] Problema assegnato nella prova scritta di Fisica I il 27/08/2020 presso il Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica di Tor Vergata (Roma)

$$E_c^i = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \qquad (1)$$

dove I è il momento d'inerzia complessivo del sistema dei due cilindri[(2)] , il cui valore è

$$I = (M_1 + M_2) R^2 \qquad (2)$$

a.2) La forza esercitata dal freno sulla superficie del cilindro inferiore determina una decelerazione della velocità di rotazione. Si deve determinare il valore della velocità angolare del sistema al termine dell'azione frenante.

Supponiamo che la forza premente esercitata dal freno sia perpendicolare alla superficie del cilindro, quindi che sia radiale e perciò la corrispondente forza di attrito esercitata è tangente alla superficie cilindrica e perpendicolare ai raggi del cilindro passanti per la superficie di contatto con la superficie frenante.

Per conseguire l'obiettivo è necessario determinare il lavoro compiuto dalla forza di attrito che agisce nell'intervallo di tempo [0;t*](s)= [0;2](s).

a.3) La forza di attrito che agisce nell'intervallo di tempo in cui agisce ha intensità variabile; nell'istante t$\in$[0;2](s) la legge è

$$F_{att.} = \mu \cdot F(t) = \mu \cdot F_0 \cdot t \qquad (3)$$

Siano ds la misura infinitesima dell'arco di circonferenza descritto da un punto di contatto del freno con la superficie del cilindro nel tempo dt, dθ l'ampiezza del corrispondente angolo di rotazione. Sussiste la relazione

$$ds = R\, d\theta \qquad (3.1)$$

e indicando con $\vec{ds}$ lo spostamento infinitesimo il lavoro compiuto dalla forza di attrito è

$$dL = \overrightarrow{F_{att.}} \cdot \overrightarrow{ds} = F_{att.} \cdot ds \cdot \cos(\pi) = -\mu \cdot F_0 \cdot t \cdot R d\theta \qquad (3.2)$$

Per calcolare il lavoro complessivo compiuto dalla forza variabile occorrerebbe affrontare il calcolo di un integrale definito, ma **la dipendenza lineare dell'intensità della forza** suggerisce che possiamo ritenere questa costante e coincidente con il suo valore medio che, per l'appunto, è il valore assunto nell'istante centrale[(3)] dell'intervallo di azione, t=t*/2. Pertanto possiamo scrivere per dL la forma

$$dL = -\mu \cdot F_0 \cdot \frac{t^*}{2} \cdot R d\theta = -\mu \cdot F_0 \cdot \frac{2s}{2} \cdot R d\theta = -\mu \cdot F_0 \cdot R d\theta \qquad (3.2.1)$$

Sia θ_1 l'angolo descritto nella rotazione dal cilindro nell'intervallo [0;2](s). Il lavoro della forza d'attrito vale:

[(2)] Un cilindro cavo di massa M e raggio R, se ha la massa uniformemente distribuita, ha momento d'inerzia $I=MR^2$ rispetto all'asse baricentrale parallelo alle direttrici del cilindro.

[(3)] Per ogni funzione lineare y= kt+h, con t$\in$[a;b], il valore medio coincide con il valore assunto dalla funzione nel punto medio dell'intervallo t=(a+b)/2.

$$L = \int_{\theta=0}^{\theta_1} -\mu \cdot F_0 \cdot R d\theta = -\mu \cdot F_0 \cdot R[\theta]_0^{\theta_1} = -\mu \cdot F_0 \cdot R \cdot \theta_1 \tag{3.3}$$

Al termine dell'azione frenante l'energia cinetica rotazionale del sistema dei due cilindri è:

$$E_c^* = E_c^i + L = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)R^2\omega_0^2 - \mu \cdot F_0 \cdot R \cdot \theta_1 \tag{3.4}$$

Osserviamo ora che è necessario conoscere il valore dell'angolo θ_1 descritto per avere effettivamente il valore dell'energica cinetica residua. Come fare?

La forza d'attrito applicata nei due secondi (che abbiamo supposto di intensità costante) ha rispetto all'asse di rotazione **un momento meccanico** $\vec{M}$ di intensità

$$\left|\vec{M}\right| = F_{att.} \cdot R = \mu \cdot F_0 \cdot \frac{t^*}{2} \tag{3.5}$$

Questo momento determina sul sistema meccanico dei due cilindri un moto rotatorio intorno (all'asse baricentrale suddetto) pari al prodotto del momento d'inerzia del sistema per l'accelerazione angolare α (che in questo caso è negativa, perché si tratta di una decelerazione), sussistendo l'uguaglianza

$$\left|\vec{M}\right| = I \cdot |\alpha| \tag{3.6}$$

Uguagliando le espressioni (3.5), (3.6) del momento meccanico si determina $|\alpha|$.

$$|\alpha| = \mu \cdot F_0 \cdot \frac{t^*}{2I} = \mu \cdot F_0 \cdot \frac{t^*}{2(M_1 + M_2)R^2} = 0,4 \cdot 0,8\frac{N}{s} \cdot \frac{2s}{2 \cdot 1,5Kg \cdot 0,5^2 m^2} = 0,853\frac{rad}{s^2}$$

Pertanto, durante la frenata, la legge temporale dell'angolo descritto da un qualsiasi punto della superficie cilindrica nell'istante t(s) è:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}|\alpha|t^2 + \omega_0 \cdot t \rightarrow \theta(t) = -\frac{1}{2} \cdot 0,853\left(\frac{rad}{s^2}\right)t^2 + 2,5\left(\frac{rad}{s}\right) \cdot t \tag{3.7}$$

e con t=2s si ha

$$\theta_1 = \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,853 \cdot 4 + 2,5 \cdot 2\right)rad = 3,294(rad). \tag{3.7.1}$$

Calcolo della velocità angolare del sistema meccanico prima del bloccaggio

Indichiamo con ω_1 il valore della velocità angolare cercato.

Il valore della velocità angolare alla fine dell'azione frenante si determina sfruttando la legge temporale della velocità angolare istantanea che è

$$\omega(t) = \omega_0 - |\alpha| \cdot t \tag{3.8}$$

ponendo t=2s. Si ha:

$$\omega_1 = 2{,}5\left(\frac{rad}{s}\right) - 0{,}853\left(\frac{rad}{s^2}\right)\cdot 2s \;= 0{,}794\left(\frac{rad}{s}\right) \qquad (3.8.1)$$

b) Calcolo della variazione del momento angolare in seguito al bloccaggio del cilindro inferiore

Prima dell'esecuzione del bloccaggio il sistema meccanico dei due cilindri rotanti ha momento angolare

$$\overrightarrow{L_1} = I\overrightarrow{\omega_1} = \left(M_1 + M_2\right)R^2\overrightarrow{\omega_1} \qquad (b.1)$$

Nella figura di riferimento il sistema meccanico viene visto ruotare nel verso antiorario, quindi il vettore $\overrightarrow{L_1}$ è parallelo all'asse di rotazione e orientato verso l'alto.

Con il bloccaggio istantaneo del cilindro inferiore si determina la perdita di energia cinetica posseduta da questo prima dell'azione bloccante, rimanendo attiva la rotazione del cilindro superiore; l'energia cinetica nello stesso istante del secondo cilindro è

$$E_{c.2}^{*} = \frac{1}{2}I_2\cdot\omega_1^{\,2} = \frac{1}{2}M_2R^2\cdot\omega_1^{\,2} \qquad (b.2)$$

Il nuovo momento angolare del sistema meccanico è dato dal solo momento angolare del cilindro n.2 rimasto in moto e perciò è il vettore

$$\overrightarrow{L_2} = I_2\overrightarrow{\omega_1} = M_2R^2\overrightarrow{\omega_1} \qquad (b.3)$$

Questo vettore è ancora parallelo all'asse di rotazione e diretto verso l'alto.

La variazione del momento angolare di tutto il sistema meccanico che si verifica con il bloccaggio del cilindro n.1 è perciò

$$\overrightarrow{\Delta L} = \overrightarrow{L_2} - \overrightarrow{L_1} = M_2R^2\overrightarrow{\omega_1} - \left(M_1 + M_2\right)R^2\overrightarrow{\omega_1} = -M_1R^2\overrightarrow{\omega_1} \qquad (b.4)$$

Il vettore $\overrightarrow{\Delta L}$ è parallelo all'asse di rotazione del sistema ma è diretto verso il basso; il suo modulo è

$$\Delta L = M_1R^2\omega_1 = 0{,}5Kg\cdot 0{,}5^2m^2\cdot 0{,}794\left(\frac{rad}{s}\right) = 9{,}925\cdot 10^{-2}Kg\cdot m^2\cdot\frac{rad}{s} \qquad (b.5)$$

c) Calcolo dell'angolo di rotazione compiuto dal cilindro superiore rispetto al cilindro inferiore prima di fermarsi

Il cilindro superiore nel moto residuo striscia sul cilindro inferiore incontrando la forza di attrito $\overrightarrow{F_{att.}^{"}}$ che si oppone al suo moto, giacente nel piano che contiene la circonferenza ideale di contatto tra i due cilindri; la forza è diretta tangenzialmente alla circonferenza di contatto e ha intensità data dal prodotto del peso del cilindro n.2 per il coefficiente di attrito μ_d=0,2:

$$F_{att.}^{"} = \mu_d\cdot M_2 g \qquad (c.1)$$

Questa forza di attrito ha rispetto all'asse di rotazione momento meccanico

$$\overrightarrow{M"} = \vec{R}\wedge\overrightarrow{F_{att.}^{"}} \qquad (c.2)$$

dove $\vec{R}$ è il vettore posizione del punto di applicazione della forza rispetto all'asse di rotazione del cilindro. I vettori $\vec{R}$ ed $\overrightarrow{F''_{att.}}$ sono ortogonali ed $\overrightarrow{M''}$ è parallelo all'asse di rotazione e diretto verso il basso. Il modulo del vettore $\overrightarrow{M''}$ è

$$M'' = R \cdot F''_{att.} \qquad \text{(c.2.1)}$$

L'effetto di questo momento meccanico è quello di determinare una decelerazione angolare del cilindro avente modulo α_2, sussistendo l'uguaglianza

$$M'' = I_2 \alpha_2 = M_2 R^2 \cdot \alpha_2 \qquad \text{(c.3)}$$

Dalle relazioni (c. 1), (c.2.1) ricaviamo

$$M'' = R \cdot F''_{att} = R \cdot \mu_d \cdot M_2 g \qquad \text{(c.4)}$$

Dal confronto delle relazioni (c.3), (c.4) **si ricava il modulo della decelerazione angolare del sistema rotante**:

$$M_2 R^2 \cdot \alpha_2 = R \cdot \mu_d \cdot M_2 g \rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{R \cdot \mu_d \cdot M_2 g}{M_2 R^2} = \frac{\mu_d \cdot g}{R} = \frac{0,4 \cdot 9,81 ms^{-2}}{0,5m} = 7,848 \left(\frac{rad}{s^2}\right) \qquad \text{(c.5)}$$

A questo punto possiamo scrivere la legge $\theta'(t)$ dell'angolo descritto nella rotazione dal cilindro n.2 nella fase di decelerazione. Ponendo t=0s come istante iniziale del moto si ha:

$$\theta'(t) = \omega_1 t - \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \qquad \text{(c.6)}$$

Scriviamo ora la legge oraria della velocità angolare $\omega'(t)$ con cui ruota il sistema:

$$\omega'(t) = \omega_1 - \alpha_2 t \qquad \text{(c.7)}$$

Ponendo $\omega'(t) = 0$ si ricava l'istante in cui il cilindro si ferma. Risulta

$$t_{fermata} = \frac{\omega_1}{\alpha_2} \qquad \text{(c.8)}$$

che sostituito nella (c.6) permette di ricavare l'angolo di rotazione cercato. Si ha

$$\theta'_{fermata} = \omega_1 \cdot \frac{\omega_1}{\alpha_2} - \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{\alpha_2}\right)^2 = \frac{\omega_1^2}{2\alpha_2} = \frac{0,794^2 \left(\frac{rad}{s}\right)^2}{2 \cdot 7,848 \left(\frac{rad}{s^2}\right)} = 0,04(rad)$$